



Wiskunde

Brugcursus

P. BUEKEN, J. JOOS, D. LUYCKX, K. VERHASSELT

19 FEBRUARI 2025

Legende

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

$\Uparrow$

Oefeningen

Theorie

Opl

OK

Detail

Hints: 

Inhoudsopgave

1	Rekenkunde	3
2	Elementaire algebra	9
3	Veeltermen	16
4	Oplossen van vergelijkingen	29
5	Oplossen van stelsels van vergelijkingen	34
6	Functies van één reële veranderlijke	41
	Rekenkunde - Oefeningen	55
	Algebra - Oefeningen	76
	Veeltermen - Oefeningen	121
	Vergelijkingen - Oefeningen	171
	Stelsels - Oefeningen	180
	Functies - Oefeningen	199

Hoofdstuk 1

Rekenkunde



Rekenkunde of arithmetica is de studie van het rekenen met getallen. We beschouwen hiervoor de verzameling van alle reële getallen, die we met $\mathbb{R}$ noteren. Deze verzameling bevat alle *rationale* getallen, dat zijn de getallen die we als een quotiënt van twee gehele getallen (of als een breuk) kunnen schrijven, en de *irrationale* getallen, die we als een niet-herhalend decimaal getal kunnen voorstellen (zoals $\pi = 3,1415\dots$). Op deze verzameling van reële getallen zullen we nu een aantal belangrijke bewerkingen invoeren en bestuderen.

1.1 Optelling en som

We kunnen twee reële getallen optellen, waarbij we een derde reëel getal bekomen dat we de som van deze getallen noemen. Enkele voorbeelden van sommen zijn

$$5,71 + 3,228 = 8,938, \quad 312,5 + 105,7 = 418,2.$$

De optelling is een commutatieve en associatieve bewerking, dit wil zeggen dat de volgorde waarin we meerdere getallen samentellen niet belangrijk is

voor het eindresultaat.

$$5, 7 + 3, 2 = 8, 9 = 3, 2 + 5, 7, \quad 1 + 2 + 3 = 1 + 5 = 6, \quad 1 + 2 + 3 = 3 + 3 = 6.$$

1.2 Aftrekking en verschil

We kunnen een reëel getal ook aftrekken van een ander reëel getal. Het resultaat van deze bewerking wordt het verschil genoemd.

$$5, 71 - 2, 3 = 3, 41, \quad 5 - 7 = -2.$$

De volgorde waarin we getallen van elkaar aftrekken is belangrijk voor het eindresultaat. We spreken daarom af dat we een uitdrukking met opeenvolgende aftrekkingen van links naar rechts uitvoeren, dus

$$5 - 2 - 1 = 3 - 1 = 2.$$

1.3 Vermenigvuldiging en product

Twee reële getallen kunnen met elkaar vermenigvuldigd worden, het resultaat van deze bewerking wordt het product van beide getallen genoemd. We zullen de vermenigvuldiging soms aanduiden met $\times$, maar in de meeste gevallen schrijven we het product met een punt, $\cdot$.

$$12 \times 6 = 72, \quad 12, 3 \cdot 4, 1 = 50, 43.$$

De vermenigvuldiging is, zoals de optelling, commutatief en associatief, en de volgorde waarin opeenvolgende vermenigvuldigingen uitgevoerd worden is bijgevolg niet belangrijk voor het eindresultaat,

$$4 \cdot 5 \cdot 6 = 4 \cdot 30 = 120, \quad 4 \cdot 5 \cdot 6 = 20 \cdot 6 = 120, \quad -4, 1 \cdot 5, 2 = -21, 32.$$

We merken op dat het product van twee positieve of twee negatieve getallen een positief getal is, terwijl een positief en een negatief getal met elkaar vermenigvuldigen een negatief product opleveren.

1.4 Deling en quotiënt, breuken

De deling van twee getallen is de omgekeerde bewerking van de vermenigvuldiging, het resultaat van de bewerking wordt het quotiënt genoemd. We noteren deze bewerking soms met het teken $:$, meestal schrijven we echter $/$.

$$120 : 4 = 30, \text{ omdat } 4 \times 30 = 120, \quad 130/17 = 7,647\dots$$

We zullen het quotiënt soms ook schrijven als een breuk, bijvoorbeeld

$$130 : 17 = 130/17 = \frac{130}{17}.$$

De volgorde waarin opeenvolgende delingen worden uitgevoerd is belangrijk voor het eindresultaat, omdat de deling niet commutatief en niet associatief is. We zullen daarom opeenvolgende delingen steeds van links naar rechts uitvoeren,

$$120/4/3 = 30/3 = 10.$$

1.5 Bewerkingen met breuken

We kunnen een gegeven breuk vereenvoudigen of in een andere, equivalente vorm, schrijven door teller en noemer van de breuk te vermenigvuldigen met of te delen door een willekeurig getal (verschillend van 0),

$$\frac{12}{28} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{3}{7}, \quad \frac{9}{24} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{3}{8}.$$

Om de som (of het verschil) te berekenen van twee *gelijknamige* breuken (dit zijn breuken met een gelijke noemer) tellen we de tellers van beide breuken samen (of berekenen we het verschil),

$$\frac{2}{13} + \frac{7}{13} = \frac{9}{13}, \quad \frac{5}{13} - \frac{7}{13} = \frac{-2}{13} = -\frac{2}{13}.$$

Als de breuken niet gelijknamig zijn kunnen we ze gelijknamig maken door, in beide breuken, de teller en de noemer te vermenigvuldigen met een goed gekozen getal:

$$\frac{7}{15} + \frac{8}{12} = \frac{28}{60} + \frac{40}{60} = \frac{68}{60} = \frac{17}{15}, \quad \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Twee breuken met elkaar vermenigvuldigen gebeurt door de tellers en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen,

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{13} = \frac{7 \cdot 6}{10 \cdot 13} = \frac{42}{130} = \frac{21}{65},$$

en het omgekeerde van een breuk bekomen we door teller en noemer te verwisselen. Om een getal te delen door een breuk, volstaat het dus dit getal te vermenigvuldigen met het omgekeerde van deze breuk, zodat

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}.$$

1.6 Machtsverheffing

Bij machtsverheffing wordt een getal, het *grondtal* genaamd, een aantal keer met zichzelf vermenigvuldigd. Het aantal factoren in dit product wordt aangegeven door de *exponent*, die we weergeven als een bovenindex.

Als we als grondtal 5 en als exponent 3 kiezen, dan is de derde macht van 5 gegeven door

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125,$$

terwijl

$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49, \quad 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243.$$

In het speciale geval waar de exponent 2 is, noemen we de tweede macht van een getal ook het *kwadraat* van dat getal.

We kunnen een product of quotiënt van twee getallen tot een macht verheffen door elk van de factoren tot deze macht te verheffen,

$$15^2 = (5 \cdot 3)^2 = 5^2 \cdot 3^2 = 25 \cdot 9 = 225, \quad \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{5^2}{8^2} = \frac{25}{64}.$$

1.7 Worteltrekking

Worteltrekking is de omgekeerde bewerking van de machtsverheffing.

De *vierkantswortel* uit een getal is het (positieve) getal waarvan het kwadraat gelijk is aan het gegeven getal, bijvoorbeeld

$$\sqrt{16} = 4, \quad \text{omdat} \quad 4^2 = 16.$$

Op dezelfde manier is de *derdemachtswortel* uit een getal dat getal waarvan de derde macht overeenkomt met het gegeven getal,

$$\sqrt[3]{125} = 5, \text{ omdat } 5^3 = 125, \quad \sqrt[3]{-8} = -2.$$

Voor andere wortelvormen kunnen we op dezelfde manier te werk gaan, en bijvoorbeeld stellen dat

$$\sqrt[5]{32} = 2.$$

De machtswortels uit een getal zijn niet altijd bepaald. Zo is het kwadraat (of een andere even macht) van een willekeurig getal steeds positief, zodat het onmogelijk is om een vierkantswortel of een 4-de machtswortel uit een negatief getal te trekken.

Anderzijds bestaan er, voor elk positief getal, steeds twee getallen waarvan het kwadraat (of een andere even macht) dit getal oplevert. Zo is bijvoorbeeld

$$4^2 = 16, \quad (-4)^2 = 16,$$

zodat telkens een positief en een negatief getal als vierkantswortel kan beschouwd worden. De afspraak is in dat geval dat we het positieve getal kiezen,

Om een wortel uit een breuk te berekenen volstaat het de wortel te bepalen uit de teller en de noemer, bijvoorbeeld

$$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}.$$

Verder is het duidelijk dat de wortel uit een product overeenkomt met het product van de wortels uit elk van de factoren,

$$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6, \quad \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

1.8 Voorrangsregels

Bij het oplossen van problemen zullen we vaak te maken krijgen met berekeningen waarbij verschillende bewerkingen na elkaar worden uitgevoerd. Om verwarring te vermijden worden, voor het uitvoeren van ingewikkelde berekeningen, een aantal afspraken gemaakt die aangeven in welke volgorde de nodige bewerkingen uitgevoerd worden: eerst voeren we machtsverheffingen en worteltrekkingen uit, vervolgens de vermenigvuldigingen en delingen,

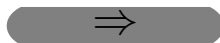
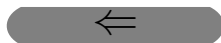
tenslotte de optellingen en aftrekkingen. Indien we van deze volgorde afwijken, geven we dit aan door het gebruik van haakjes: de uitdrukkingen tussen haakjes zullen dan eerst uitgewerkt worden.

Zo is bijvoorbeeld

$$4+3\cdot 5-4^3/2^2 = 4+15-64/4 = 4+15-16 = 3, \quad (4+3)\cdot 5-4/2 = 35-2 = 33.$$

1.9 Gebruik van een rekenmachine

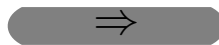
Vaak wordt bij het uitvoeren van ingewikkelde berekeningen gebruik gemaakt van een zakrekenmachine. Sommige, vaak oudere, zakrekenmachines maken gebruik van een ander soort van voorrangsregels, zodat het niet altijd voldoende is de gevraagde bewerking over te typen. Raadpleeg dus steeds de handleiding van je zakrekenmachine vooraleer je dergelijke berekeningen maakt met je rekenmachine. Indien je twijfelt, bereken je het resultaat best in enkele stappen, waarbij je rekening houdt met de afgesproken volgorde, of gebruik je de op je rekenmachine aanwezige haakjestoetsen.



Oefeningen

Hoofdstuk 2

Elementaire algebra



Oefeningen

Soms is een reëel getal niet of moeilijk precies voor te stellen met behulp van cijfers (decimale schrijfwijze), en is het makkelijker dit getal voor te stellen met behulp van een symbool. Dit is het geval, bijvoorbeeld, voor het reëel getal $\pi = 3,1415\dots$, het getal $e = 2,78\dots$ en de vierkantswortel uit 2, $\sqrt{2} = 1,4\dots$. Dergelijke symbolen, die een bepaald (vast) getal voorstellen, noemen we *constanten*.

Soms is het ook interessant dat we een getal niet precies hoeven te kennen om een berekening te beschrijven, en dat we de exacte waarde van dat getal achteraf kunnen invullen, of dat we de berekening tegelijkertijd kunnen maken voor alle mogelijke waarden die dat getal in verschillende omstandigheden kan aannemen. In dit geval is het ook interessant dat we dit getal kunnen voorstellen met behulp van een symbool (dat we een *variabele*, een *veranderlijke* of soms een *onbekende* noemen), zoals een letterteken of een woord. Zo weten we bijvoorbeeld dat de omtrek van een willekeurige cirkel gegeven wordt door het product van π (een constante) met de lengte van de middellijn van de cirkel (het dubbel van de straal),

$$\text{Omtrek} = 2 \cdot \pi \cdot \text{Straal}.$$

Uitdrukken dat persoon A dubbel zo oud is als persoon B kan gebeuren met

de formule

$$A = 2 \cdot B,$$

terwijl de inhoud V van een kubus met zijde Z gegeven wordt door

$$V = Z^3.$$

In dit hoofdstuk over elementaire algebra bestuderen we een aantal technieken om dergelijke formules te behandelen. Deze technieken worden afgeleid uit een (zeer beperkt) aantal rekenregels uit de rekenkunde, die geldig blijven voor alle waarden die we in de uitdrukkingen invullen.

2.1 Som en verschil, product en quotiënt

We zagen reeds dat de som van reële getallen *commutatief* en *associatief* is, dit wil zeggen dat voor willekeurige getallen $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$a + b = b + a, \quad (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c.$$

Dit betekent dat de volgorde waarin getallen samengeteld worden geen rol speelt voor het eindresultaat. Verder is 0 het neutraal element voor de optelling,

$$a + 0 = a,$$

en bestaat er voor elk getal $a \in \mathbb{R}$ een (unieke) tegengestelde, $-a$, zo dat

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a.$$

De tegengestelde van een som is de som van de tegengestelden van alle termen,

$$-(a + b) = (-a) + (-b).$$

We kunnen het verschil van twee getallen beschouwen als de som van een getal en het tegengestelde van het tweede getal,

$$a - b = a + (-b).$$

Het product van reële getallen (aangegeven als $a \cdot b$ of, waar mogelijk, als ab) is commutatief en associatief, dus geldt voor willekeurige getallen $a, b, c \in \mathbb{R}$ dat

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c,$$

en we besluiten dat de orde waarin getallen vermenigvuldigd worden onbelangrijk is. Verder is 1 het neutraal element voor de vermenigvuldiging en is 0 het (unieke) opslorpend element,

$$a \cdot 1 = a, \quad a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ of } b = 0.$$

Elk getal $a \neq 0$ heeft een omgekeerde, die we met $\frac{1}{a}$ aanduiden, waarvoor geldt dat

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

We zien dat de omgekeerde van een product gelijk is aan het product van de omgekeerden der factoren,

$$\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}.$$

Het product is verder distributief ten opzichte van de som,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Deze eigenschap laat ons toe een product te schrijven als een som of, indien gewenst, een gemeenschappelijke factor in een som “vooraan te stellen”.

De deling van een getal a door een getal b (en dus ook een breuk $\frac{a}{b}$) kan beschouwd worden als een vermenigvuldiging van a met de omgekeerde van b ,

$$a/b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Door gebruik te maken van deze rekenregels kunnen we reeds een groot aantal uitdrukkingen vereenvoudigen. De meeste gekende regels uit de rekenkunde zijn gevolgen van de hierboven beschreven eigenschappen.

2.2 Bewerkingen met breuken

Het product van twee breuken kan berekend worden als

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = a \cdot b \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{d} = a \cdot b \cdot \frac{1}{c \cdot d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}.$$

Omdat

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot b}{a \cdot b} = 1$$

zien we dat de omgekeerde van $\frac{a}{b}$ gelijk is aan $\frac{b}{a}$,

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}.$$

Hieruit volgt dat het quotiënt van twee breuken kan berekend worden als

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Hieruit volgt dat, voor een willekeurige waarde $c \in \mathbb{R}_0$,

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c},$$

waaruit we besluiten dat we de teller en de noemer van een breuk steeds kunnen vermenigvuldigen met of delen door een getal (verschillend van 0) zonder de waarde van deze breuk te veranderen. Dit laat ons toe breuken in een andere, eenvoudigere vorm te schrijven of, indien nodig, twee breuken gelijknamig te maken (“op gelijke noemer te zetten”).

De som van twee gelijknamige breuken wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{c} &= a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} \\ &= (a + b) \cdot \frac{1}{c} = \frac{a + b}{c}, \end{aligned}$$

terwijl we de som van twee (of meer) willekeurige breuken kunnen berekenen door deze breuken gelijknamig te maken,

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{d} &= a \cdot d \cdot \frac{1}{c \cdot d} + b \cdot c \cdot \frac{1}{c \cdot d} \\ &= (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \frac{1}{c \cdot d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{c \cdot d}. \end{aligned}$$

2.3 Machtsverheffing en worteltrekking

Voor een (strikt positief) natuurlijk getal n en een reëel getal $a \in \mathbb{R}$ definiëren we de n -de macht van a (uitgesproken als “ a tot de n -de”) als

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a, \quad n \text{ factoren.}$$

De n -de machtswortel uit een reëel getal a , aangeduid met $\sqrt[n]{a}$, is een reëel getal waarvan de n -de macht gelijk is aan a ,

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

In het speciale geval $n = 2$ wordt de tweede macht van een getal ook het kwadraat van dat getal genoemd, en spreken we over de vierkantswortel in plaats van over de tweede machtswortel.

Uit de rekenregels voor de vermenigvuldiging volgt dat

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n,$$

voor alle reële getallen a, b en alle (strikt positieve) natuurlijke getallen n, m . Als we veronderstellen dat deze resultaten geldig blijven voor andere (niet-natuurlijke) exponenten, zien we dat

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0,$$

waaruit volgt dat

$$a^0 = 1.$$

Verder besluiten we uit

$$a^0 = a^{1+(-1)} = a^1 \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1}$$

dat a^{-1} de omgekeerde is van a . Vaak wordt deze notatie daarom gebruikt om de omgekeerde van een reëel getal aan te geven,

$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

We kunnen daarom ook stellen dat

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Meer algemeen schrijven we ook

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Omdat

$$(a^{1/n})^n = a^{n \cdot 1/n} = a^1 = a,$$

kunnen we ook stellen dat

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

Meer algemeen volgt hieruit dat

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p},$$

en we zullen deze notatie in het vervolg regelmatig gebruiken.

Met de hierboven ingevoerde definities besluiten we dat, voor alle mogelijke waarden van $a, b \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{Q}$, geldt dat

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad (a^p)^q = a^{p \cdot q}, \quad (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p.$$

Door speciale waarden voor p en q te kiezen leiden we hieruit onmiddellijk een aantal regels voor het werken met wortelvormen af:

$$\sqrt[p]{a \cdot b} = \sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{b}, \quad \sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a}, \quad \sqrt[pq]{a^{pr}} = \sqrt[q]{a^r}.$$

Verder zien we onmiddellijk dat

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = (a \cdot b^{-1})^p = a^p \cdot b^{-p} = \frac{a^p}{b^p},$$

en door p te vervangen door $\frac{1}{q}$ zien we dat

$$\sqrt[q]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}}.$$

2.4 Merkwaardige producten

Door gebruik te maken van de hierboven ingevoerde rekenregels, kunnen we onmiddellijk de volgende “merkwaardige producten” bekomen:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + 2x \cdot y + y^2, \\ x^2 - y^2 &= (x+y)(x-y), \\ (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \\ x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2), \\ x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2). \end{aligned}$$

Meer algemeen kunnen we aantonen dat, voor elke waarde van $n \in \mathbb{N}_0$, geldt dat

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-2} x^2 y^{n-2} + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n,\end{aligned}$$

waarbij de *binomiaalcoëfficiënt* $\binom{n}{k}$ gedefinieerd wordt als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

De faculteit van een natuurlijk getal wordt hierbij gedefinieerd als

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, \quad 0! = 1.$$

Verder geldt, voor elke waarde van $n \in \mathbb{N}_0$, dat

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + \dots + x^1y^{n-2} + x^0y^{n-1}).$$



Oefeningen

Hoofdstuk 3

Veeltermen



3.1 Definities

Een veelterm (in de veranderlijke x) is een uitdrukking van de vorm

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

De uitdrukkingen a_i , $i = 0, 1, \dots, n$ zijn (meestal) reële getallen, en ze worden de coëfficiënten van de veelterm genoemd. De hoogste macht van de veranderlijke x die voorkomt in de uitdrukking (dus n , op voorwaarde dat $a_n \neq 0$), wordt de graad (in x) van de veelterm genoemd. De uitdrukking

$$x^5 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 8$$

is dus een veelterm van graad 5 met reële coëfficiënten in de veranderlijke x . De uitdrukking $4y^2 - 2y + 1$ is een veelterm van graad 2 in de onbekende y , terwijl

$$x^2 + 4 \sin(x)$$

geen veelterm is.

3.2 Som, verschil en product van veeltermen

De som van twee veeltermen in de veranderlijke x is opnieuw een veelterm in de veranderlijke x . Uit de rekenregels van de algebra volgt onmiddellijk dat de coëfficiënt van x^i in deze nieuwe veelterm gelijk is aan de som van de coëfficiënten van x^i in de oorspronkelijke veeltermen. Zo is de som van

$$A = x^3 + 2x^2 + 3x + 4, \quad B = x^3 + 4x^2 + 5x + 6$$

gelijk aan

$$\begin{aligned} A + B &= (x^3 + 2x^2 + 3x + 4) + (x^3 + 4x^2 + 5x + 6) \\ &= x^3 + 2x^2 + 3x + 4 + x^3 + 4x^2 + 5x + 6 \\ &= x^3 + x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 3x + 5x + 4 + 6 \\ &= (1 + 1)x^3 + (2 + 4)x^2 + (3 + 5)x + (4 + 6) \\ &= 2x^3 + 6x^2 + 8x + 10, \end{aligned}$$

en op dezelfde manier leiden we af dat

$$(x^2 + 2yx + y^2) + (x^3 + 3yx^2 + 3y^2x + y^3) = x^3 + (1 + 3y)x^2 + (2y + 3y^2)x + (y^2 + y^3).$$

Het tegengestelde van een veelterm wordt bekomen door elke coëfficiënt van de veelterm te vervangen door zijn tegengestelde, en het verschil van twee veeltermen wordt gedefiniëerd als de som van een veelterm met het tegengestelde van de tweede veelterm,

$$\begin{aligned} (2x^2 + 3x + 5) - (x^2 + 2x - 5) &= (2x^2 + 3x + 5) + (-x^2 - 2x + 5) \\ &= (2 - 1)x^2 + (3 - 2)x + (5 + 5) \\ &= x^2 + x + 10, \\ (x^2 - 7x + 9) - (x^2 + 2x - 5) &= (x^2 - 7x + 9) + (-x^2 - 2x + 5) \\ &= (1 - 1)x^2 + (-7 - 2)x + (9 + 5) \\ &= -9x + 14. \end{aligned}$$

Uit de rekenregels van de algebra volgt dat het product van twee veeltermen (in de veranderlijke x) opnieuw een veelterm is in de veranderlijke x , waarvan de graad overeenkomt met de som van de graden van de oorspronkelijke veeltermen. Zo is het product van de veeltermen (van graad 2)

$$A = x^2 + 2x + 3, \quad B = x^2 + 5x + 7,$$

gegeven door

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (x^2 + 2x + 3) \cdot (x^2 + 5x + 7) \\ &= x^2 \cdot x^2 + 2x \cdot x^2 + 3 \cdot x^2 \\ &\quad + x^2 \cdot 5x + 2x \cdot 5x + 3 \cdot 5x \\ &\quad + x^2 \cdot 7 + 2x \cdot 7 + 3 \cdot 7 \\ &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x^3 + 10x^2 + 15x + 7x^2 + 14x + 21 \\ &= x^4 + (2 + 5)x^3 + (3 + 10 + 7)x^2 + (15 + 14)x + 21 \\ &= x^4 + 7x^3 + 20x^2 + 29x + 21. \end{aligned}$$

3.3 Euclidische deling van veeltermen

Beschouwen we twee willekeurige veeltermen D en d , waarbij we veronderstellen dat $d \neq 0$. We kunnen dan steeds veeltermen Q en R construeren waarvoor geldt dat

$$D = Q \cdot d + R.$$

Indien we bovendien eisen dat de graad van de veelterm R kleiner is dan de graad van d , zijn de veeltermen Q en R uniek.

Beschouwen we bijvoorbeeld

$$D = x^3 + 2x^2 + 3x + 4, \quad d = x^2 + x + 1,$$

dan zien we dat

$$Q = x + 1, \quad R = x + 3,$$

(de enige) veeltermen zijn waarvoor geldt dat

$$D = Q \cdot d + R,$$

terwijl de graad van R (in dit geval 1) kleiner is dan de graad van d (in dit geval 2).

Deze constructie lijkt sterk op de deling van een (natuurlijk) getal D door een ander (natuurlijk) getal d , waarbij we twee getallen Q en R zoeken waarvoor geldt dat

$$D = Q \cdot d + R,$$

met als bijkomende eis dat $R < d$. We kunnen deze constructie daarom beschouwen als de deling van de veelterm D door de veelterm d . De veelterm Q wordt het quotiënt genoemd, de veelterm R is de rest van de deling.

Om een veelterm D (van graad n),

$$D = D_n x^n + D_{n-1} x^{n-1} + \dots + D_1 x + D_0,$$

in de praktijk te delen door een andere veelterm d (van graad m),

$$d = d_m x^m + d_{m-1} x^{m-1} + \dots + d_1 x + d_0,$$

gebruiken we het *Euclidische delingsalgoritme*.

We merken eerst op dat, als $n < m$, we onmiddellijk kunnen stellen dat $D = 0 \cdot d + R$, en dus is

$$R = D, \quad Q = 0.$$

In wat volgt zullen we daarom aannemen dat $n \geq m$.

Stellen we dus dat de graad van de veelterm Q gelijk is aan l ,

$$Q = q_l x^l + q_{l-1} x^{l-1} + \dots + q_1 x + q_0,$$

en dat de graad van R kleiner is dan m (de graad van d). We kunnen de coëfficiënten van de veelterm Q dan stap voor stap bepalen.

Om de coëfficiënt q_l van de hoogstegraadsterm van Q te bepalen, merken we op dat de hoogstegraadsterm van de uitdrukking $Q \cdot d + R$ gelijk is aan

$$q_l x^l \cdot d_m x^m = q_l d_m x^{l+m}.$$

Omdat $D = Q \cdot d + R$, kunnen we de hoogstegraadstermen van beide uitdrukkingen vergelijken (in de veronderstelling dat $n \geq m$), en we besluiten dat

$$l + m = n, \quad q_l d_m = D_n.$$

We zien bijgevolg dat de graad van de veelterm Q gelijk is aan $n - m$, en dat de hoogstegraadsterm van Q gegeven wordt door

$$q_{n-m} x^{n-m} = \frac{D_n}{d_m} x^{n-m}.$$

We kunnen de veelterm Q dus schrijven als

$$Q = \frac{D_n}{d_m} x^{n-m} + Q',$$

waarbij de graad van Q' kleiner is dan $n - m$. De uitdrukking

$$D = Q \cdot d + R = q_{n-m} x^{n-m} \cdot d + Q' \cdot d + R$$

kan dan geschreven worden als

$$D - q_{n-m}x^{n-m} \cdot d = Q' \cdot d + R.$$

en we besluiten dat de veelterm Q' het quotiënt is van de deling van de nieuwe veelterm

$$D' = D - q_{n-m}x^{n-m} \cdot d$$

door de veelterm d . We kunnen bijgevolg het delingsalgoritme opnieuw toepassen.

We kunnen dit delingsalgoritme als volgt samenvatten:

Stap 1 Als de graad van D kleiner is dan de graad van d , $n < m$, dan is $Q = 0$ en $R = D$.

Stap 2 Bepaal de hoogstegraadsterm van de veelterm Q ,

$$q_{n-m}x^{n-m} = \frac{D_n}{d_m}x^{n-m}.$$

Stap 3 Bereken de nieuwe veelterm

$$D' = D - q_{n-m}x^{n-m} \cdot d.$$

De graad van deze veelterm is lager dan die van de veelterm D .

Stap 4 Deel de veelterm D' door de veelterm d (door de vorige drie stappen opnieuw uit te voeren). Het quotiënt Q' van deze deling legt de overige coëfficiënten van de veelterm Q vast. De rest R van deze deling is ook de rest van de oorspronkelijke deling.

We kunnen dit delingsalgoritme illustreren aan de hand van een voorbeeld, waarbij we de volgende veeltermen beschouwen:

$$D = x^3 + 2x^2 + 3x + 4, \quad d = x^2 + x + 1.$$

We zien dat de hoogstegraadsterm van het quotiënt gegeven wordt door

$$q_1x = \frac{1}{1}x^{3-2} = x,$$

en de veelterm

$$D' = D - x \cdot d$$

is van de vorm

$$(x^3 + 2x^2 + 3x + 4) - x(x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 4.$$

Delen we deze nieuwe veelterm door de veelterm d , dan zien we dat

$$q_0 = \frac{1}{1}x^{2-2} = 1,$$

en

$$(x^2 + 2x + 4) - 1 \cdot (x^2 + x + 1) = x + 3.$$

Omdat deze veelterm een graad heeft die kleiner is dan 2, besluiten we dat

$$Q = q_1x + q_0 = x + 1, \quad R = x + 3,$$

en dus is

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = (x + 1) \cdot (x^2 + x + 1) + (x + 3).$$

De hierboven beschreven techniek kan het eenvoudigst uitgevoerd worden als een “staartdeling”, zoals aangegeven in het volgende schema.

$\mathcal{D} =$	$x^3 + 2x^2 + 3x + 4$	$\Big $	$x^2 + x + 1$	$= d$
$-x \cdot d$	$-(x^3 + x^2 + x)$		x	q_1x
$\mathcal{D}'$	$x^2 + 2x + 4$		$+1$	$q_0 = Q$
$-1 \cdot d$	$-(x^2 + x + 1)$			
	$x + 3$			
	$\mathcal{R}$			

$Q = x + 1$
 $\mathcal{R} = x + 3$

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 + 2x^2 + 3x + 4 & = & (x+1) \cdot (x^2+x+1) & + & (x+3) \\ \mathcal{D} & & Q \cdot d & & + \mathcal{R} \end{array}$$

- EUCLIDES 1 -

$$\begin{array}{r}
 D = x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 8x + 5 \\
 -x^2d \quad -(x^4 + 2x^3 - x^2) \\
 \hline
 D' \quad 5x^3 + 4x^2 + 8x + 5 \\
 -(5x)d \quad -(5x^3 + 10x^2 - 5x) \\
 \hline
 D'' \quad -6x^2 + 13x + 5 \\
 -(-6)d \quad -(-6x^2 - 12x + 6) \\
 \hline
 \quad \quad \quad 25x - 1 \\
 \quad \quad \quad \underline{\quad} \\
 \quad \quad \quad R
 \end{array}
 \quad
 \left|
 \begin{array}{r}
 x^2 + 2x - 1 = d \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 x^2 \quad 9_2x^2 \\
 +5x \quad 9_1x \\
 -6 \quad 9_0
 \end{array}
 \end{array}
 \right\} = Q$$

$$\begin{aligned}
 Q &= x^2 + 5x - 6 \\
 R &= 25x - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 8x + 5 & = & (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 2x - 1) & + & (25x - 1) \\
 D & & Q \cdot d & & + R
 \end{array}$$

- EUCLIDES 2 -

$$\begin{array}{r}
 x^4 + x^2 + 3x + 5 \\
 -(x^4 + x^3) \\
 \hline
 -x^3 + x^2 + 3x + 5 \\
 -(-x^3 - x^2) \\
 \hline
 2x^2 + 3x + 5 \\
 -(2x^2 + 2x) \\
 \hline
 x + 5 \\
 -(x + 1) \\
 \hline
 4
 \end{array}
 \quad
 \left|
 \begin{array}{r}
 x + 1 \\
 \hline
 x^3 - x^2 + 2x + 1
 \end{array}
 \right.$$

$$x^4 + x^2 + 3x + 5 = (x^3 - x^2 + 2x + 1) \cdot (x + 1) + 4$$

- EUCLIDES 3 -

3.4 Regel van Horner

Wanneer we een veelterm D delen door een veelterm van de vorm $d = x - a$, kan dit ook door gebruik te maken van een eenvoudiger schema, dat de “regel van Horner” genoemd wordt. Hieronder vind je enkele uitgewerkte voorbeelden van dergelijke delingen.

$$D = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

$$d = x - 1 \rightarrow a = 1$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 D \rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & \downarrow & + & + & + \\
 a \rightarrow & 1 & 1 & 3 & 6 \\
 & \downarrow & \nearrow + a & \nearrow + a & \nearrow + a \\
 & 1 & 3 & 6 & 10 \\
 \hline
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{Q = x^2 + 3x + 6} & & & R = 10
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 x^3 + 2x^2 + 3x + 4 & = & (x^2 + 3x + 6) \cdot (x - 1) & + & 10 \\
 D & & Q \cdot d & & R
 \end{array}$$

- HORNER 1 -

$$D = x^4 + 2x^2 + 7x - 1 = x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 7x - 1$$

$$d = x - 2 \rightarrow a = 2 \quad (!)$$

$$D \rightarrow \begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 & -1 \\ & & + & + & + \\ a \rightarrow 2 & 1 & 2 & 6 & 19 & 37 \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ & 1 & 2 & 6 & 19 & 37 \end{array}$$

$Q = x^3 + 2x^2 + 6x + 19 \quad R = 37$

$$\begin{array}{ccccccc} x^4 & + & 2x^2 & + & 7x & - & 1 \\ D & & & & & & \\ & = & (x^3 + 2x^2 + 6x + 19) \cdot (x - 2) & + & 37 \\ & & Q & & d & + & R \end{array}$$

- HORNER 2 -

$$D = x^3 + 5x^2 + 7x + 2$$

$$d = x + 2 \rightarrow a = -2$$

$$= x - (-2)$$

$$D = \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 5 & 7 & 2 \\ & & + & + & + \\ a \rightarrow -2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

$Q = x^2 + 3x + 1 \quad R = 0$

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 & + & 5x^2 & + & 7x & + & 2 \\ D & & & & & & \\ & = & (x^2 + 3x + 1) \cdot (x + 2) & + & 0 \\ & & Q & & d & + & R \end{array}$$

- HORNER 3 -

$$\mathcal{D} = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

$$d = x + 1$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 -1 & & -1 & -1 & -2 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 2 & 2
 \end{array}$$

$$Q = x^2 + x + 2$$

$$R = 2$$

$$(x^2 + x + 2)(x + 1) + 2 = x^3 + 2x^2 + 3x + 4.$$

- HORNER 4 -

3.5 Ontbinding in factoren

Voor bepaalde toepassingen is het belangrijk dat we een gegeven wiskundige uitdrukking kunnen schrijven als een product van een aantal eenvoudigere uitdrukkingen. Dit is bijvoorbeeld het geval wanneer we de waarden van een onbekende x zoeken waarvoor de uitdrukking 0 wordt. We weten dat een product van uitdrukkingen slechts 0 wordt indien (minstens) een der factoren nul wordt, en het volstaat dus de voor elk van de factoren de waarden te zoeken waarvoor deze factor verdwijnt. Zo zien we bijvoorbeeld dat

$$x^2 - 4x = x \cdot (x - 4),$$

en bijgevolg zijn de waarden van x waarvoor geldt dat

$$x^2 - 4x = 0$$

gegeven door

$$x = 0, \quad x - 4 = 0,$$

dus $x = 0$ en $x = 4$.

3.5.1 Techniek 1 : Gemeenschappelijke termen vooraan stellen

Wanneer elk van de termen van een uitdrukking een bepaalde factor bevat, kunnen we gebruik maken van de distributiviteitseigenschap om deze term “vooraan te stellen”, dit wil zeggen dat we de uitdrukking schrijven als een product waarbij deze gemeenschappelijke factor één der factoren wordt. Zo kunnen we bijvoorbeeld stellen dat

$$2x^3 + 4x^2 + 6x = 2x \cdot (x^2 + 2x + 3).$$

Op dezelfde manier is

$$\begin{aligned} ax + 3x + ay + 3y &= (a + 3)x + (a + 3)y \\ &= (a + 3)(x + y). \end{aligned}$$

3.5.2 Techniek 2 : Merkwaardige producten

In sommige gevallen kunnen we de uitdrukking beschouwen als een merkwaardig product. Dit is bijvoorbeeld het geval wanneer de uitdrukking een verschil van kwadraten of van derdemachten bevat. Zo kunnen we bijvoorbeeld stellen dat

$$\begin{aligned} 9x^2 - 64a^2 &= (3x - 8a) \cdot (3x + 8a), \\ 3x^3 - 27 &= 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3), \end{aligned}$$

en op dezelfde manier tonen we aan dat

$$\begin{aligned} 5x^2 - 30x + 45 &= 5(x^2 - 6x + 9) = 5(x - 3)^2, \\ 4x^2 - 12x + 9 &= (2x - 3)^2. \end{aligned}$$

Het is daarom zeer interessant om de vorm van dergelijke producten grondig te bestuderen, en deze vorm te leren herkennen in een gegeven uitdrukking.

3.5.3 Techniek 3 : Samennemen van enkele termen uit de uitdrukking

In sommige gevallen kan men een gegeven uitdrukking ontbinden in factoren door in een eerste stap een aantal termen samen te nemen die een merkwaardig product vormen, of waarin reeds een gemeenschappelijke factor kan

vooraan gesteld worden. Het resultaat van deze bewerking moet dan een uitdrukking zijn die eenvoudiger in factoren kan ontbonden worden. Zo kan men bijvoorbeeld eenvoudig uitrekenen dat

$$\begin{aligned}
 a^2 - 2ab + b^2 - c^2 &= (a^2 - 2ab + b^2) - c^2 \\
 &= (a - b)^2 - c^2 \\
 &= ((a - b) - c)((a - b) + c) \\
 &= (a - b - c)(a - b + c), \\
 ab + ac + b^2 + bc &= (ab + ac) + (b^2 + bc) \\
 &= a(b + c) + b(b + c) \\
 &= (a + b)(b + c), \\
 a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc &= (a^2 + 2ab + b^2) + (ac + bc) \\
 &= (a + b)^2 + (a + b)c \\
 &= (a + b)((a + b) + c) \\
 &= (a + b)(a + b + c).
 \end{aligned}$$

3.5.4 Techniek 4 : Uitdelen van een gekende factor

We weten dat, indien we nul bekomen door de onbekende x in een veelterm te vervangen door een waarde a , de ontbinding van de veelterm een factor van de vorm $x - a$ bevat. Door de veelterm Euclidisch te delen door $x - a$ (de rest R is in dit geval 0), schrijven we deze veelterm dan als

$$P = Q \cdot (x - a), \quad R = 0.$$

Beschouwen we de veelterm

$$P = x^2 - 3x + 2.$$

Het is duidelijk dat we 0 bekomen wanneer we $x = 1$ stellen, en we kunnen bijgevolg stellen dat $x - 1$ een factor in de ontbinding van P vormt. De andere factor wordt bekomen door de euclidische deling (of de regel van Horner), en we vinden dat

$$P = (x - 1)(x - 2).$$

Op dezelfde manier zien we dat

$$P = x^3 + 3x^2 - 4$$

een factor $x - 1$ bevat. Door de euclidische deling uit te voeren vinden we dat

$$P = (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)(x + 2)^2.$$

3.6 Veeltermen in meerdere veranderlijken

In wat voorafgaat hebben we ons grotendeels beperkt tot de studie van veeltermen in één veranderlijke. Men kan het begrip “veelterm” echter zeer eenvoudig veralgemenen.

We voeren hiervoor eerst de notie van een éénterm in. Dit is een uitdrukking die gevormd wordt als een product van een getal (de *coëfficiënt*) en machten van één of meerdere veranderlijken. Voorbeelden van ééntermen zijn

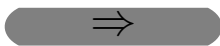
$$x^2, \quad x^3y^2, \quad 3x, \quad 7xy^3z, \dots$$

De graad van een éénterm wordt gedefinieerd als de som van de machten van de veranderlijken die in de uitdrukking voorkomen. Zo is x^2 een éénterm van graad 2, terwijl x^3y^2 (resp. $3x$, $7xy^3z$) een éénterm is van graad 5 (resp. 1, 5).

Een veelterm in meerdere veranderlijken kan nu ingevoerd worden als de som van een aantal ééntermen in die veranderlijken. De graad van een dergelijke veelterm is dan de hoogste graad van een éénterm die er deel van uitmaakt. Zo is

$$yx^3 + 2yx^2 + 3y^2x + 5y^4$$

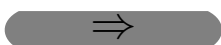
een veelterm van graad 4 in de veranderlijken x en y .



Oefeningen

Hoofdstuk 4

Oplossen van vergelijkingen



Oefeningen

Een gelijkheid is een uitdrukking van de vorm $P = Q$, waarin beide onderdelen P en Q van een veranderlijke, bijvoorbeeld x , afhangen. Indien de uitdrukking $P = Q$ waar is voor elke waarde van de veranderlijke x , spreken we van een identiteit. Wanneer de uitspraak niet algemeen geldig is, maar enkel waar is voor een beperkt aantal waarden van de veranderlijke x , spreken we van een vergelijking. De veranderlijke x wordt dan aangeduid als een onbekende in de vergelijking, en het oplossen van de vergelijking is het bepalen van alle mogelijke waarden van de onbekende x waarvoor de uitspraak waar is.

Zo geldt, voor elke waarde van $x \in \mathbb{R}$, dat

$$(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 4x,$$

en deze uitspraak is daarom een identiteit. Anderzijds is aan de uitspraak

$$x^2 = 1$$

niet voor elke reële waarde van x voldaan, en we spreken daarom van een vergelijking. De oplossingen worden in dit geval duidelijk gegeven door

$$x = 1, \quad x = -1.$$

Als $P = Q$, dan geldt ook dat

$$P + A = Q + A, \quad P \cdot B = Q \cdot B,$$

waarbij $A \in \mathbb{R}$ en $B \in \mathbb{R}_0$. We kunnen een vergelijking (of een identiteit) dus steeds vereenvoudigen door bij beide leden dezelfde waarde toe te voegen of door beide leden met een getal (verschillend van 0) te vermenigvuldigen.

4.1 Oplossen van lineaire vergelijkingen

We spreken van een lineaire vergelijking (in de onbekende x) wanneer de uitdrukking, eventueel na vereenvoudiging, kan geschreven worden in de vorm

$$ax + b = 0,$$

waarbij a en b reële getallen zijn (of uitdrukkingen die niet van x afhankelijk zijn) en $a \neq 0$.

Opmerking. In het speciale geval waarin $a = 0$, spreken we niet langer van een lineaire vergelijking in de onbekende x . Indien $b = 0$ is het duidelijk dat elke waarde van x voldoet aan de uitspraak, en dat de uitspraak dus een identiteit is. Indien $b \neq 0$ heeft de vergelijking geen oplossingen. In wat volgt beschouwen we daarom enkel het geval $a \neq 0$.

Door van beide leden van de uitdrukking b af te trekken kunnen de vergelijking in dit geval herleiden tot

$$ax = -b,$$

en door beide leden van de vergelijking te delen door $a \neq 0$ vinden we de oplossing van de vergelijking als

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Op deze manier zien we dat de lineaire vergelijking $2x+6 = 0$ in de onbekende x kan geschreven worden als

$$2x = -6, \quad x = -3,$$

en we besluiten dat $x = -3$ de enige oplossing van deze vergelijking vormt.

Op dezelfde manier herleiden we de vergelijking

$$2x + 3 = 7x - 2$$

tot een van de standaardvormen door van beide leden de uitdrukking $7x - 2$ af te trekken. (We brengen deze uitdrukking “naar de andere kant van de gelijkheid”.) We bekomen dan

$$(2x + 3) - (7x - 2) = 0,$$

$$2x + 3 - 7x + 2 = 0,$$

$$-5x + 5 = 0,$$

$$-5x = -5,$$

$$x = \frac{-5}{-5},$$

$$x = 1.$$

4.2 Oplossen van kwadratische vergelijkingen

Een vierkantsvergelijking of kwadratische vergelijking (in de onbekende x) is een uitdrukking die we, na vereenvoudiging, kunnen schrijven in de vorm

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$.

Opmerking. Wanneer $a = 0$ spreken we niet langer van een kwadratische vergelijking in de onbekende x . De vergelijking kan dan opgelost worden door gebruik te maken van de hierboven ingevoerde technieken voor het oplossen van lineaire vergelijkingen.

De eenvoudigste kwadratische vergelijkingen zijn van de vorm

$$x^2 = A, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Indien A strikt positief is, heeft een dergelijke vergelijking twee oplossingen, $x = \sqrt{A}$ en $x = -\sqrt{A}$. Wanneer $A = 0$, is er slechts één oplossing, $x = 0$. Voor negatieve waarden van A vinden we geen reële getallen x die oplossingen zijn van de vergelijking.

De andere kwadratische vergelijkingen worden opgelost door ze te schrijven als

$$\begin{aligned} a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) &= 0, \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0, \\ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} &= 0, \\ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) &= 0, \\ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) &= 0, \\ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

De uitdrukking $D = b^2 - 4ac$ wordt de discriminant van de vierkantsvergelijking genoemd. Indien de discriminant van de vergelijking strikt positief is, zien we dat de oplossingen van de vergelijking gegeven worden door

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

en we besluiten dat

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

de oplossingen van de kwadratische vergelijking zijn.

Wanneer de discriminant $D = 0$ is, zien we dat

$$x = -\frac{b}{2a}$$

de enige oplossing vormt van deze vergelijking, en als de discriminant negatief is volgt onmiddellijk dat de vergelijking geen reële getallen als oplossing heeft. De vergelijking

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

heeft discriminant

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9,$$

en de oplossingen van de vergelijking zijn bijgevolg gegeven door

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2},$$

waaruit we besluiten dat $x = 2$ en $x = 5$ de enige oplossingen zijn.

De vergelijking

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

heeft discriminant

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 144 - 144 = 0,$$

en de enige oplossing is dus gegeven door

$$x = -\frac{-12}{2} = 6.$$

De vergelijking

$$2x^2 + 4x + 5 = 0$$

heeft discriminant

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4,$$

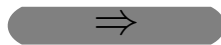
en bijgevolg bestaan er geen reële oplossingen voor deze vierkantsvergelijking.



Oefeningen

Hoofdstuk 5

Oplossen van stelsels van vergelijkingen



Oefeningen

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien hoe we (lineaire) vergelijkingen in één onbekende kunnen oplossen. Soms wordt bij de beschrijving van een probleem meer dan één onbekende gebruikt, en dienen we de waarde van deze onbekenden te bepalen aan de hand van meerdere vergelijkingen. We spreken dan van een stelsel van vergelijkingen in deze onbekenden. We beperken ons in dit hoofdstuk tot het geval waarbij alle beschouwde vergelijkingen lineair zijn in de onbekenden, en we zoeken de oplossingen van deze stelsels, dit wil zeggen alle waarden van de onbekenden waarvoor alle aangegeven vergelijkingen voldaan zijn.

Beschouwen we bijvoorbeeld het volgende probleem: Binnen 4 jaar is Amber driemaal zo oud als Britt. Vandaag is Amber 18 jaar ouder dan Britt. Hoe oud zijn Amber en Britt vandaag?

Als we de leeftijden van Amber en Britt voorstellen met de symbolen A en B , kunnen we de eerste uitspraak vertalen naar de vergelijking

$$A + 4 = 3(B + 4),$$

terwijl de andere uitspraak oplevert dat

$$A = B + 18.$$

We weten dus dat de getallen A en B (de onbekenden uit het probleem) voldoen aan het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} A + 4 &= 3(B + 4) \\ A &= B + 18 \end{cases}$$

We kunnen hieruit afleiden dat

$$A = 23, \quad B = 5.$$

Door gebruik te maken van de elementaire rekenregels uit de algebra, kunnen we een stelsel van m lineaire vergelijkingen in de n onbekenden $x_1, x_2, \dots, x_n$ altijd herleiden tot de vorm

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{cases}$$

Zo kunnen we ons voorbeeld schrijven in de vorm

$$\begin{cases} A - 3B &= 8 \\ A - B &= 18 \end{cases}$$

Een tweede voorbeeld wordt gegeven door het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x + y + z &= 6, \\ x + 2y + 3z &= 14, \\ 3x + 3y + z &= 12. \end{cases}$$

De oplossing van dit stelsel is van de vorm

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.$$

Een eerste methode voor het oplossen van dergelijke stelsels is de *substitutiemethode*. Hierbij wordt telkens één vergelijking uit het stelsel opgelost naar een bepaalde onbekende. We vinden dan een uitdrukking voor deze

onbekende in termen van de overgebleven veranderlijken. Door deze uitdrukking in elk van de resterende vergelijkingen in te vullen, bekomen we steeds eenvoudiger op te lossen stelsels, en uiteindelijk wordt de waarde van de laatste veranderlijke bepaald als de oplossing van een lineaire vergelijking. We kunnen dan gebruik maken van deze waarde en de hierboven bekomen uitdrukkingen om de waarden van de andere onbekenden vast te leggen. In het eerste voorbeeld volgt uit de tweede vergelijking onmiddellijk dat

$$A = B + 18,$$

en met behulp van deze uitdrukking bekomen we voor de eerste vergelijking

$$(B + 18) - 3B = 8,$$

waaruit we afleiden dat

$$-2B + 18 = 8, \quad B = 5.$$

Deze waarde invullen in de uitdrukking voor A levert dan

$$A = B + 18 = 5 + 18 = 23.$$

In het tweede voorbeeld vinden we uit de eerste vergelijking dat

$$x = 6 - y - z,$$

en we bekomen dus een nieuw stelsel

$$\begin{cases} y + 2z = 8, \\ -2z = -6. \end{cases}$$

Uit de tweede vergelijking van dit nieuwe stelsel vinden we dat

$$z = 3,$$

en de overblijvende vergelijking levert ons dan

$$y + 6 = 8, \quad y = 2.$$

Invullen van deze waarden in de uitdrukkingen voor z en x levert dan

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.$$

Een tweede methode wordt de *combinatiemethode* genoemd. We merken hiervoor op dat we bij een vergelijking (of een veelvoud ervan) uit het stelsel steeds een aantal keer een andere vergelijking (of, meer algemeen, een lineaire combinatie van de andere vergelijkingen) kunnen optellen, zonder dat we de oplossingen van het stelsel veranderen. We bekomen op deze manier dus een equivalent stelsel. Bij de combinatiemethode wordt deze techniek gebruikt om de vergelijkingen van het stelsel, door het maken van interessante combinaties, te herleiden tot een eenvoudigere vorm, waaruit de oplossingen onmiddellijk af te lezen zijn.

In het eerste voorbeeld kunnen we van de eerste vergelijking bijvoorbeeld de tweede vergelijking aftrekken, waardoor we een equivalent stelsel vinden met de vorm

$$\begin{cases} -2B = -10, \\ A - B = 18. \end{cases}$$

Door vervolgens van het dubbel van de tweede vergelijking de eerste vergelijking af te trekken vinden we dat

$$\begin{cases} -2B = -10, \\ 2A = 46. \end{cases}$$

We besluiten hieruit onmiddellijk dat

$$A = 23, \quad B = 5.$$

In het tweede voorbeeld trekken we van de tweede en de derde vergelijking een veelvoud van de eerste vergelijking af, en we bekomen

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y + 2z = 8, \\ -2z = -6. \end{cases}$$

Door de derde vergelijking bij de tweede te tellen, vinden we

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y = 2, \\ -2z = -6, \end{cases}$$

en tenslotte trekken we van het dubbel van de eerste vergelijking de tweede af, en tellen we er de derde bij, waardoor we bekomen dat

$$\begin{cases} 2x = 2, \\ y = 2, \\ -2z = -6, \end{cases}$$

Door deze eenvoudige lineaire vergelijkingen op te lossen bekomen we de verwachte oplossing

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.$$

In de voorbeelden die we tot nu toe hebben behandeld, vinden we telkens een unieke oplossing. Dit is echter niet altijd het geval.

Indien we bijvoorbeeld een stelsel bestuderen dat minder vergelijkingen heeft dan onbekenden, hangt de oplossing vaak af van “vrije parameters”. Dit wil zeggen dat we de waarde van een aantal onbekenden vrij kunnen kiezen, en dat de waarden van de overige onbekenden van deze gekozen waarden afhangen.

Beschouwen we bijvoorbeeld het stelsel

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$$

We kunnen dit stelsel met behulp van de combinatiemethode herleiden tot een equivalent stelsel,

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ z = 2. \end{cases}$$

Als we voor y een willekeurige waarde A kiezen, zien we dat

$$x = 4 - A, \quad z = 2,$$

een oplossing levert voor dit stelsel. Zo is bijvoorbeeld

$$x = 4, \quad y = 0, \quad z = 2$$

een oplossing, maar ook

$$x = 0, \quad y = 4, \quad z = 2$$

en

$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = 2.$$

Anderzijds bestaan er ook stelsels die geen oplossingen hebben, omdat de vergelijkingen elkaar “tegenspreken”, dit wil zeggen dat ze tegenstrijdige eisen

op de onbekenden leggen. Een eenvoudig voorbeeld van een dergelijk stelsel wordt gevormd door de lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

In dit geval zullen we, bij het oplossen van het stelsel met één van de hierboven ingevoerde methodes, op een bepaald moment een vergelijking bekomen van de vorm

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b.$$

Wanneer $b = 0$, is deze vergelijking altijd voldaan, en kunnen we deze uit het stelsel weglaten omdat ze geen bijkomende voorwaarden oplegt aan de onbekenden. Indien $b \neq 0$, betreft het echter een vergelijking die nooit kan voldaan zijn, en vinden we bijgevolg geen enkele aanvaarbare oplossing voor het stelsel.

Beschouwen we bijvoorbeeld het stelsel van vergelijkingen

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 3x + 2y + z = 12. \end{cases}$$

Door de eerste vergelijking van de tweede, en drie keer de eerste vergelijking van de derde af te trekken, vinden we een gelijkwaardig stelsel

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y + 2z = 8, \\ -y - 2z = -6, \end{cases}$$

en als we de derde vergelijking nu bij de tweede tellen vinden we

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 0 = 2, \\ -y - 2z = -6, \end{cases}$$

waaruit we besluiten dat dit stelsel geen oplossingen heeft. Anderzijds levert het stelsel

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + 2y + 2z = 1, \\ x + 3y + 3z = 1. \end{cases}$$

ons met de combinatiemethode dat

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ y + z = 0, \\ 2y + 2z = 0, \end{cases}$$

en dus

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ y + z = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

We kunnen de laatste vergelijking bijgevolg weglaten, en vinden dat de oplossing gegeven wordt door

$$x = 1, \quad y = -A, \quad z = A.$$

Opmerking. We kunnen een lineaire vergelijking in twee onbekenden grafisch voorstellen als een rechte in het vlak, terwijl de grafische voorstelling van een lineaire vergelijking in drie onbekenden gegeven wordt door een vlak in de driedimensionale ruimte.

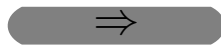
Het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen komt dan overeen met het bepalen van de punten die behoren tot de grafische voorstelling van elk van de beschouwde vergelijkingen. Het is dan duidelijk dat, in het algemeen, een stelsel van twee lineaire vergelijkingen in twee onbekenden een unieke oplossing heeft: het snijpunt van de twee overeenkomstige rechten. Wanneer de rechten echter samenvallen, krijgen we meerdere oplossingen, terwijl we in het geval waarin de rechten evenwijdig zijn maar niet samenvallen geen enkele oplossing vinden.



Oefeningen

Hoofdstuk 6

Functies van één reële veranderlijke



Oefeningen

6.1 Functies van één reële veranderlijke

Een *reële functie*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x),$$

vaak kortweg voorgesteld als $y = f(x)$, is een voorschrift dat met elk reëel getal x ten hoogste één (dus één of geen) reëel getal $f(x)$ laat overeenkomen. Het getal $f(x)$ (als dit getal bestaat) wordt het *beeld* van x onder de functie f genoemd. De verzameling van alle reële getallen x die een beeld hebben onder de functie f noemen we het *domein* van de functie f , en we duiden deze verzameling aan als $\text{dom}(f)$.

Voorbeeld. De functie $y = x^2$ beeldt een reëel getal x af op zijn kwadraat x^2 . Het beeld van 0 onder deze functie is 0, het beeld van 2 (resp. -3) is 4 (resp. 9). Het domein van deze functie is de verzameling van alle reële getallen, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

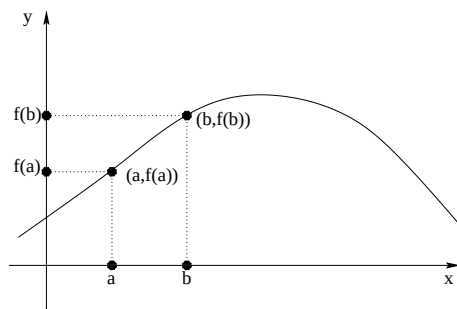
Voorbeeld. De functie $y = 3x + 1$ beeldt een reëel getal x af op het getal $3x + 1$. Het beeld van 0 onder deze functie is 1, het beeld van 2 is 7. Het

domein van deze functie is de verzameling van alle reële getallen, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

Voorbeeld. De functie $y = \sqrt{x}$ beeldt een getal x af op zijn (positieve) vierkantswortel. Het beeld van 0 onder deze functie is 0, het beeld van 9 is 3. Het is duidelijk dat deze functie enkel een beeld geeft voor positieve reële getallen, en dat bijgevolg $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.

Voorbeeld. De functie $y = \frac{1}{x}$ beeldt een getal x af op zijn omgekeerde, $\frac{1}{x}$. Het beeld van 2 onder deze functie is 0.5, het beeld van 0.4 is 2.5, en het beeld van -1 is -1. Het is duidelijk dat deze functie een beeld geeft voor alle reële getallen behalve 0, en dat bijgevolg $\text{dom}(f) = \mathbb{R}_0$.

Beschouwen we een reële functie $y = f(x)$. Door voor elk punt $x \in \text{dom}(f)$ het beeld $f(x)$ onder de functie f te berekenen kunnen we de functie grafisch voorstellen als de verzameling van de punten $(x, f(x))$ in het vlak. De figuur die we zo bekomen noemen we de *grafiek* van de functie f .



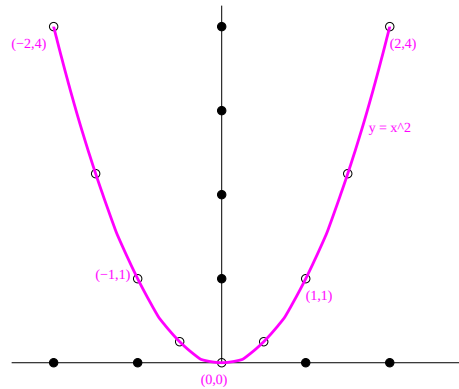
Figuur 6.1: Grafische voorstelling van een reële functie

Functies van één reële veranderlijke zijn een zeer nuttig hulpmiddel voor het beschrijven van o.a. verschijnselen in de fysica (zoals de beweging van een massa) en verschijnselen in de economie.

Voorbeeld. Een trein rijdt met een constante snelheid van 30 m/s. Als we het aantal seconden vanaf het vertrek voorstellen als t , dan is de afgelegde weg gegeven door de functie

$$s(t) = 30t.$$

Voorbeeld. Een trein vertrekt in Antwerpen en rijdt met een constante snelheid van 50 m/s richting Brussel, 40 km verderop. De afstand (uitgedrukt



Figuur 6.2: Grafische voorstelling van de functie $y = x^2$

in meter) tot het eindpunt van de reis wordt dan, voor elk tijdstip t , gegeven door de functie

$$s(t) = 40000 - 50t.$$

Voorbeeld. Beschouwen we een massa die van een hoogte van 10000 meter naar beneden valt, (enkel) onder invloed van de zwaartekracht. Dan wordt de hoogte van dit voorwerp boven het aardoppervlak (bij benadering) beschreven door de functie

$$h(t) = 10000 - 5t^2.$$

We leiden hieruit af dat, na een val van 10 seconden, het voorwerp zich nog op een hoogte van 9500 meter bevindt. Na 30 seconden bevindt het voorwerp zich op 5500 meter.

Voorbeeld. De trilling van een massa, opgehangen aan een veer, kan beschreven worden met behulp van een functie

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

De waarde $x(t)$ is dan de uitwijking ten opzichte van het evenwichtspunt, dat het voorwerp bereikt op tijdstip t . De waarden A , ω en φ zijn constanten.

Voorbeeld. Een eenvoudig model voor het verband tussen de prijs P van een voorwerp (bv. een fiets) en de vraag naar dit voorwerp Q (het aantal exemplaren dat ervan verkocht kan worden aan de gegeven prijs) wordt gegeven door

$$Q = 10000 - 10P.$$

Deze functie toont ons dat we, bij een vraagprijs van 500 euro, 5000 fietsen zullen verkopen. Bij een prijs van 800 euro zal dit aantal terugvallen tot 2000 verkochte fietsen.

6.2 Lineaire functies

Een belangrijke familie van (eenvoudige) functies van één reële veranderlijke $y = f(x)$ wordt gevormd door de lineaire functies

$$y = mx + C,$$

waarbij de parameters C en m twee (willekeurige) reële getallen zijn. In het speciale geval waarbij $m = 0$ spreken we van een *constante* functie,

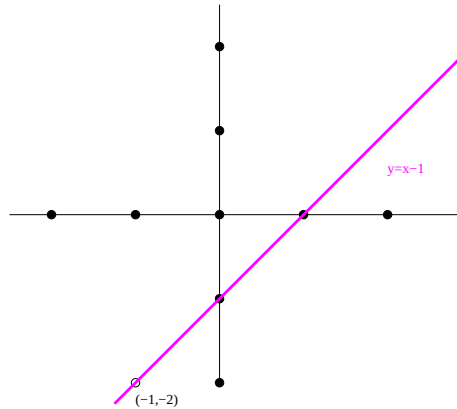
$$y = C.$$

De grafische voorstelling van een lineaire functie vormt een rechte in het vlak. Het volstaat bijgevolg om twee punten van de grafiek te bepalen, en een rechte lijn door deze twee punten te tekenen.

Voorbeeld. De lineaire functie $y = x - 1$ levert voor $x = -1$ de waarde $y = -2$, en voor $x = 3$ de waarde $y = 2$. De rechte lijn door de punten met coördinaten $(-1, -2)$ en $(3, 2)$ vormt bijgevolg de grafische voorstelling van deze lineaire functie.

Voorbeeld. De lineaire functie $y = 3x + 1$ levert voor $x = 0$ de waarde $y = 1$, en voor $x = 1$ de waarde $y = 4$. De rechte lijn door de punten met coördinaten $(0, 1)$ en $(1, 4)$ vormt bijgevolg de grafische voorstelling van deze lineaire functie.

Voorbeeld. De lineaire functie $y = -2x + 5$ levert voor $x = -2$ de waarde $y = 9$, en voor $x = 1$ de waarde $y = 3$. De rechte lijn door de punten met coördinaten $(-2, 9)$ en $(1, 3)$ vormt bijgevolg de grafische voorstelling van deze lineaire functie.



Figuur 6.3: Grafische voorstelling van de lineaire functie $y = x - 1$

In het speciale geval van een constante functie $y = C$ zien we dat, voor elke waarde van x , de overeenkomstige y -waarde gelijk is aan C . De grafische voorstelling van deze constante functie wordt daarom gegeven door een horizontale lijn.

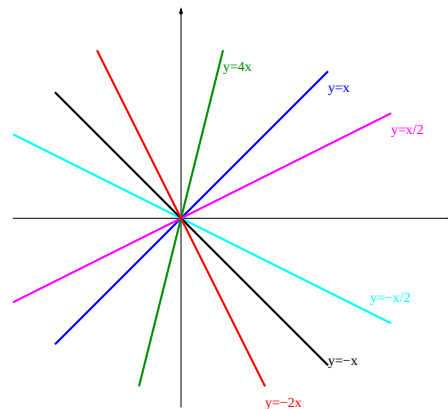
Een lineaire functie $y = mx + C$ wordt voorgesteld door een rechte in het vlak. Het getal m geeft de “richting” van de rechte aan, en wordt de *richtingscoëfficiënt* van de rechte genoemd. We kunnen de richtingscoëfficiënt interpreteren als de toename (of afname) in de verticale richting, die overeenkomt met een toename van één eenheid in de horizontale richting. Deze verhouding hangt duidelijk af van de hoek die de rechte vormt met de horizontale as. Rechten met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn bijgevolg evenwijdig. Een negatieve richtingscoëfficiënt geeft aan dat de rechte dalend is, d.w.z. dat grotere x -waarden overeenkomen met kleinere y -waarden, terwijl rechten met een positieve richtingscoëfficiënt stijgend zijn. Het getal C levert ons de y -waarde overeenkomstig met $x = 0$, en bijgevolg het snijpunt van de rechte met de y -as. Om het snijpunt van de rechte $y = mx + C$ met de x -as te bepalen (dus de waarde van x waarvoor de overeenkomstige y -waarde gelijk

is aan 0), zoeken we de oplossing van de lineaire vergelijking

$$mx + C = 0.$$

We vinden, in het algemeen, dat

$$x = -\frac{C}{m}.$$



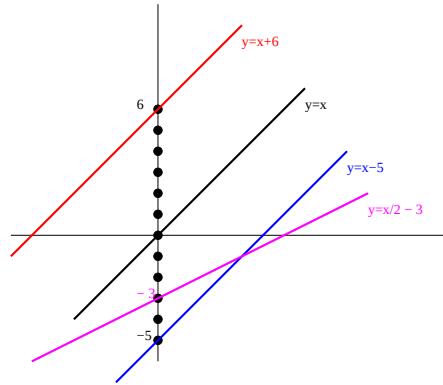
Figuur 6.4: Lineaire functies met verschillende richtingscoëfficiënten

Beschouwen we twee punten met coördinaten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) in het vlak. Als deze punten geen gelijke x -coördinaten hebben, kunnen we door deze twee punten één (niet-verticale) rechte tekenen. Omdat een toename $x_2 - x_1$ in de horizontale richting overeenkomt met een toename $y_2 - y_1$ in de verticale richting, wordt de richtingscoëfficiënt van deze rechte gegeven door

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

De rechte is bijgevolg de grafische voorstelling van een (lineaire) functie van de vorm

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + C.$$



Figuur 6.5: De rol van het getal C

Als we eisen dat het punt (x_1, y_1) tot deze rechte moet behoren, zien we dat C zó moet zijn dat

$$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + C.$$

Bijgevolg is $C = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$, en de lineaire functie is dus van de vorm

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1.$$

We kunnen deze functie ook schrijven als

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Uit de vorige redenering kunnen we ook afleiden dat een rechte, door een punt met coördinaten (x_1, y_1) en met richtingscoëfficiënt m , gegeven wordt door de lineaire functie

$$y = m(x - x_1) + y_1.$$

Voorbeeld. De rechte door de punten $(1, 5)$ en $(3, 11)$ heeft richtingscoëfficiënt

$$m = \frac{11 - 5}{3 - 1} = 3,$$

en wordt gegeven door de lineaire functie

$$y = 5 + 3(x - 1)$$

of

$$y = 3x + 2.$$

6.3 Lineaire interpolatie en de regel van drie

Zeer ruw gesteld is *interpolatie* een techniek waarbij een uitspraak over een onbekende situatie wordt gedaan op basis van gekende situaties “in de buurt” van de gezochte situatie. Praktisch willen we bijvoorbeeld (een benaderde waarde van) het brandstofverbruik van een voertuig kennen voor een gegeven snelheid (bv. 80 km/u), terwijl we enkel precieze informatie hebben over het brandstofverbruik bij enkele andere snelheden (bv. 50 km/u, 90 km/u en 120 km/u).

Vertaald naar wiskundige termen willen we de waarde van een (ongekende) functie $y = f(x)$ berekenen voor een gegeven waarde x_0 , terwijl we de beelden van deze functie enkel exact kennen voor een beperkt aantal andere x -waarden.

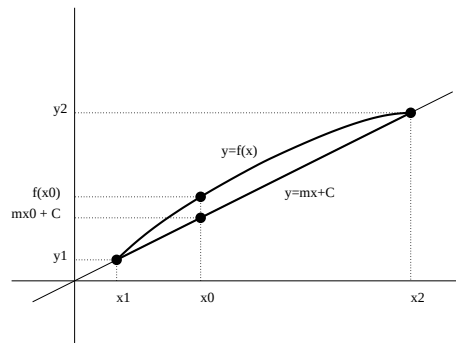
Bij *lineaire interpolatie* probeert men de (benaderde) waarde van de functie in een punt x_0 te bepalen door gebruik te maken van twee gekende functiewaarden $f(x_1)$ en $f(x_2)$ van de functie in punten x_1 en x_2 , gelegen aan weerszijden van het punt x_0 . Men zal de grafiek van de (ongekende) functie in dit geval vervangen door een rechte lijn door de twee gekende punten $(x_1, f(x_1))$ en $(x_2, f(x_2))$, en benaderde waarden voor de functiewaarden $f(x_0)$ in tussenvallende punten berekenen door gebruik te maken van de overeenkomstige lineaire functie $y = mx + C$.

Zoals we tevoren hebben gezien, wordt de rechte door de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) gegeven door de lineaire functie

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

De (benaderde) waarde voor y_0 of $f(x_0)$ wordt bijgevolg gegeven door

$$y_0 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1).$$



Figuur 6.6: Lineaire interpolatie

We kunnen deze formule ook interpreteren als een eenvoudige toepassing van de "regel van drie". Als een toename $x_2 - x_1$ overeenkomt met een toename $y_2 - y_1$, dan zal een toename $x_0 - x_1$ overeenkomen met een toename

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1).$$

Omdat we beginnen bij y_1 levert een dergelijke toename een resultaat van

$$y_0 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1).$$

Voorbeeld. Stel dat het waterpeil in een rivier om 14u gelijk is aan 8 meter, en om 14u20 gelijk is aan 8.30 meter, bepaal dan het waterpeil om 14u15. Als we in 20 minuten een toename bekomen van 0.30 meter, betekent dit dat we elke minuut een toename van

$$\frac{0.30}{20} = 0.015\text{m}$$

zien. Op 15 minuten betekent dit een toename van

$$15 \cdot 0.015 = 0.225\text{m}.$$

Het waterpeil zal om 14u15 bijgevolg gelijk zijn aan 8.225 meter.
De formule toont ons dat

$$y_0 = 8 + \frac{8.30 - 8}{14 : 20 - 14 : 00}(14 : 15 - 14 : 00) = 8.225$$

Voorbeeld. Als een schip met een snelheid van 10 knopen vaart verbruikt het 3 ton per uur aan brandstof. Bij een snelheid van 14 knopen wordt dit 5 ton per uur. Hoe groot is het brandstofverbruik bij een snelheid van 13 knopen?

Met behulp van de formule voor lineaire interpolatie vinden we een brandstofverbruik van

$$3 + \frac{5 - 3}{14 - 10}(13 - 10) = 4.5 \text{ ton per uur.}$$

Als een snelheidstoename van 4 knopen een toename van het brandstofverbruik met 2 ton per uur inhoudt, dan levert elke snelheidstoename met 1 knoop een extra verbruik van 0.5 ton per uur op. Bij een snelheidstoename met 3 knopen (van 10 naar 13 knopen) betekent dit 1.5 ton per uur bovenop de 3 ton per uur die we aan 10 knopen verbruiken.

6.4 Kwadratische functies

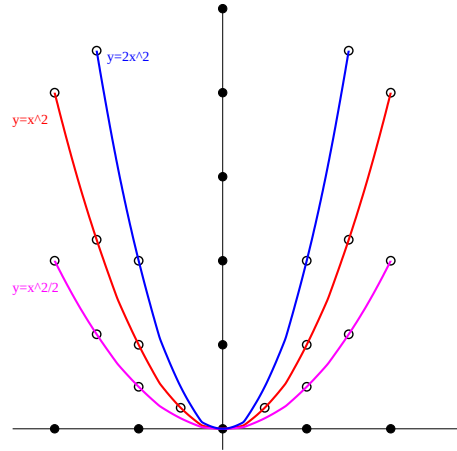
Een tweede interessante familie van functies van één reële veranderlijke wordt gevormd door de *kwadratische* functies. Deze functies zijn van de vorm

$$y = ax^2 + bx + c,$$

waarbij a , b en c willekeurige reële getallen zijn, en waarbij $a \neq 0$.
De grafische voorstelling van een kwadratische functie van de vorm

$$y = ax^2$$

wordt gevormd door een parabool. De top van deze parabool is gelegen in het punt $(0,0)$, en de waarde van a geeft aan hoe de parabool is geöriënteerd. Positieve waarden van a leveren een “dalparabool” op (waarbij de top het “laagste punt” vormt), terwijl negatieve waarden van a een “bergparabool” als kromme opleveren (waarbij de top het “hoogste punt” van de



Figuur 6.7: Grafische voorstelling van de functie $y = ax^2$

kromme vormt). Verder stellen we in de bijgevoegde figuur vast dat een grotere (absolute) waarde van a een “steilere” parabool oplevert dan een kleinere absolute waarde.

We kunnen een willekeurige kwadratische functie

$$y = ax^2 + bx + c$$

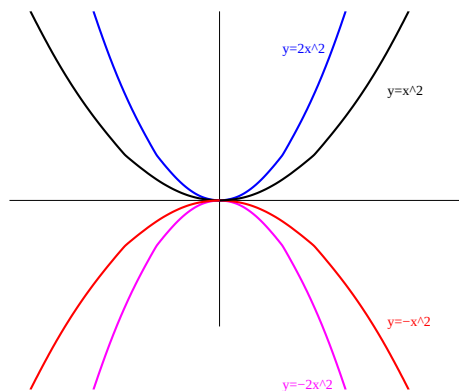
alternatief voorstellen als

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

en dus schrijven in de vorm

$$y = a(x - A)^2 + B, \quad A = -\frac{b}{2a}, \quad B = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Een dergelijke kromme kan beschouwd worden als een “vershoven” versie van de kromme $y = ax^2$. Eerst wordt de kromme horizontaal verschoven over een afstand A (naar rechts voor positieve A , links voor negatieve A),



Figuur 6.8: Grafische voorstelling van de functie $y = ax^2$

daarna volgt een verticale verschuiving over een afstand B (naar boven voor positieve waarden van B , naar onder voor negatieve waarden).

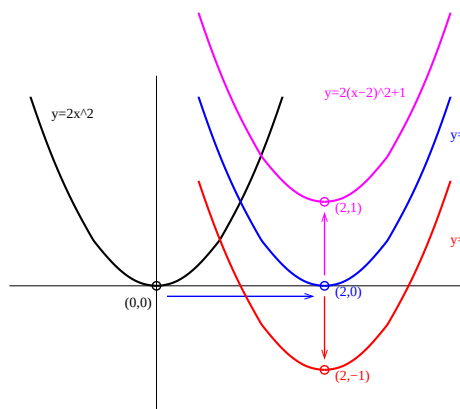
De grafiek van een willekeurige kwadratische functie vormt bijgevolg een *parabool* in het vlak. Zoals hierboven vastgesteld geeft het teken van de parameter a aan hoe de parabool geïoriënteerd is (“bergparabool” voor negatieve waarden van a , “dalparabool” voor positieve waarden van a) en hoe steil de kromme loopt. De *top* van deze parabool is gelegen in het punt met coördinaten

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

6.5 Snijpunten bepalen

Beschouwen we twee krommen in het vlak, gegeven door de functies

$$y = f(x), \quad y = g(x).$$



Figuur 6.9: Grafische voorstelling van de functie $y = a(x - A)^2 + B$

Om de snijpunten van deze twee krommen te bepalen, volstaat het om op te merken dat de snijpunten overeenkomen met de waarden van x waarvoor

$$f(x) = g(x).$$

Door deze vergelijking op te lossen kunnen we bijgevolg de x -coördinaten van alle snijpunten vastleggen.

Voorbeeld. Het snijpunt van de rechten, gegeven door de lineaire functies $y = 3x + 2$ en $y = -x - 6$, bekomen we door de vergelijking

$$3x + 2 = -x - 6$$

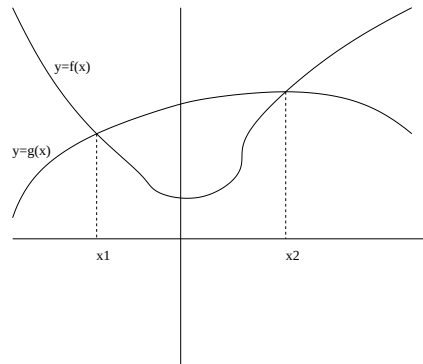
op te lossen. Dit levert ons voor het snijpunt een x -coördinaat -2 , en een bijhorende y -coördinaat -4 . Het snijpunt is bijgevolg het punt $(-2, -4)$.

Voorbeeld. De snijpunten van de rechte, gegeven door de lineaire functies $y = 3x + 9$ en de parabool, gegeven door $y = 3x^2 - 9$, worden bepaald door de vergelijking

$$3x^2 - 9 = 3x + 9$$

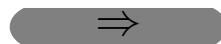
op te lossen. De kwadratische vergelijking

$$3x^2 - 3x - 18 = 0$$



Figuur 6.10: Snijpunten van twee krommen

heeft als oplossingen -2 en 3 , en de snijpunten zijn bijgevolg $(-2, 3)$ en $(3, 18)$.



Oefeningen

Rekenkunde - Opgaven

Oefening 1 - Opgave



Bereken

- ① $1 + 2 \cdot 3$
- ② $2 \cdot 8 - 6$
- ③ $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5$
- ④ $6 \cdot 7 - 8 \cdot 9$
- ⑤ $7 \cdot 3 - 100/4$
- ⑥ $6 + 10/2$
- ⑦ $200/4/2$
- ⑧ $40/8 - 18/3$

Theorie

Opl

Oefening 2 - Opgave



Bereken

- ➊ $(4 + 5) \cdot 2$
- ➋ $(3 + 6) \cdot (4 + 9)$
- ➌ $(3 + 6) \cdot (4 - 9)$
- ➍ $(3 + 6)/(2 + 1)$
- ➎ $3 + 6/(2 + 1)$
- ➏ $(3 + 7)/2 + 2$
- ➐ $3 + 6/2 + 1$
- ➑ $9 - 8/(2 + 2) + 5 \cdot (4 + 1)$
- ➒ $(4 + 5) \cdot 2 - 4 + 5 \cdot 2$

Theorie

Opl

Oefening 3 - Opgave



Bereken

- ➊ $1/3 + \frac{8}{3}$
- ➋ $2/3 + 4/5$
- ➌ $(2/3) \cdot (4/5)$
- ➍ $\frac{1}{9} - \frac{2}{5}$
- ➎ $\frac{1}{-9} \cdot \frac{-3}{5}$
- ➏ $(2/3)/(4/5)$
- ➐ $\frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{7}}$
- ➑ $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{27}{8}}$
- ➒ $\frac{1 + 2 \cdot 3}{5 \cdot 2 + 9/3}$

Theorie

Opl

Oefening 4 - Opgave



Bereken

- ➊ 2^4
- ➋ $(-1)^3$
- ➌ $5^3 - 2^5 + (-2)^3$
- ➍ $(1 + 2 \cdot 3)^2$
- ➎ $2 \cdot 7^2 - 8 \cdot 6^2$
- ➏ $\sqrt{5 + 2 \cdot 2}$
- ➐ $\sqrt{3^2 + 4 \cdot 4}$
- ➑ $\sqrt{4^3}$
- ➒ $\sqrt[5]{32}$
- ➓ $\sqrt{2/3} \cdot \sqrt{\frac{8}{27}}$
- ➑ $\sqrt{9} + \sqrt[3]{27} - 5 \cdot \sqrt{81}$

Theorie

Opl

Oefening 5 - Opgave



Bereken

$$(1 + 2 \cdot 3)^2 + 2^3 \cdot (5 - 6)^5 + 2 \cdot 3^2 - 7/8 + \frac{\sqrt{\frac{8}{125}}}{\sqrt{\frac{5}{2}}}$$

Theorie

Opl

Oefening 6 - Opgave



Los alle oefeningen op met behulp van je rekenmachine.

Theorie

Opl

Oefening 7 - Opgave



Beschrijf de volgende reeks bewerkingen met behulp van één formule. Maak deze formule zo eenvoudig mogelijk. Bepaal tenslotte het eindresultaat van de bewerking. Voer de berekening eveneens uit met je rekenmachine.

“Bereken de som van 1 en 2. Vermenigvuldig dit getal met 5, en bereken het kwadraat van dit product. Tel hier 7 en het product van 2 en het kwadraat van 3 bij op. Deel het resultaat door de som van het kwadraat van 4 en de wortel uit 81, en tel hier 5 bij op. “

Theorie

Opl

Rekenkunde - Oplossing

Oefening 1 - Oplossing

- ① $1 + 2 \cdot 3 = 7$
- ② $2 \cdot 8 - 6 = 10$
- ③ $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 26$
- ④ $6 \cdot 7 - 8 \cdot 9 = -30$
- ⑤ $7 \cdot 3 - 100/4 = -4$
- ⑥ $6 + 10/2 = 11$
- ⑦ $200/4/2 = 25$
- ⑧ $40/8 - 18/3 = -1$

Theorie

OK

Detail

Oefening 2 - Oplossing

- ① $(4 + 5) \cdot 2 = 18$
- ② $(3 + 6) \cdot (4 + 9) = 117$
- ③ $(3 + 6) \cdot (4 - 9) = -45$
- ④ $(3 + 6)/(2 + 1) = 3$
- ⑤ $3 + 6/(2 + 1) = 5$
- ⑥ $(3 + 7)/2 + 2 = 7$
- ⑦ $3 + 6/2 + 1 = 7$
- ⑧ $9 - 8/(2 + 2) + 5 \cdot (4 + 1) = 32$
- ⑨ $(4 + 5) \cdot 2 - 4 + 5 \cdot 2 = 24$

Theorie

OK

Detail

Oefening 3 - Oplossing

- ① $1/3 + \frac{8}{3} = 3$
- ② $2/3 + 4/5 = \frac{22}{15}$
- ③ $(2/3) \cdot (4/5) = \frac{8}{15}$
- ④ $\frac{1}{9} - \frac{2}{5} = -\frac{13}{45}$
- ⑤ $\frac{1}{-9} \cdot \frac{-3}{5} = \frac{1}{15}$
- ⑥ $(2/3)/(4/5) = \frac{5}{6}$
- ⑦ $\frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{7}} = \frac{7}{3}$
- ⑧ $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{8}} = \frac{9}{4}$
- ⑨ $\frac{\frac{27}{1 + 2 \cdot 3}}{5 \cdot 2 + 9/3} = \frac{7}{13}$

Theorie

OK

Detail

Oefening 4 - Oplossing

- ➊ $2^4 = 16$
- ➋ $(-1)^3 = -1$
- ➌ $5^3 - 2^5 + (-2)^3 = 85$
- ➍ $(1 + 2 \cdot 3)^2 = 49$
- ➎ $2 \cdot 7^2 - 8 \cdot 6^2 = -190$
- ➏ $\sqrt{5 + 2 \cdot 2} = 3$
- ➐ $\sqrt{3^2 + 4 \cdot 4} = 5$
- ➑ $\sqrt{4^3} = 8$
- ➒ $\sqrt[5]{32} = 2$
- ➓ $\sqrt{2/3} \cdot \sqrt{\frac{8}{27}} = \frac{4}{9}$
- ➑ $\sqrt{9} + \sqrt[3]{27} - 5 \cdot \sqrt{81} = -39$

Theorie

OK

Detail

Oefening 5 - Oplossing

$$(1 + 2 \cdot 3)^2 + 2^3 \cdot (5 - 6)^5 + 2 \cdot 3^2 - 7/8 + \frac{\sqrt{\frac{8}{125}}}{\sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{11627}{200}$$

Theorie

OK

Detail

Oefening 6 - Oplossing

Theorie

OK

Detail

Oefening 7 - Oplossing

Deze beschrijving kan samengevat worden in de volgende uitdrukking:

$$(((1 + 2) \cdot 5)^2 + 7 + 2 \cdot 3^2)/(4^2 + \sqrt{81}) + 5$$

Het resultaat van deze uitdrukking is 15.

Theorie

OK

Detail

Rekenkunde - Uitwerking

Oefening 1 - Uitwerking

Vermenigvuldiging en deling hebben voorrang op optelling en aftrekking; bijgevolg is

- ① $1 + 2 \cdot 3 = 1 + 6 = 7$
- ② $2 \cdot 8 - 6 = 16 - 6 = 10$
- ③ $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 6 + 20 = 26$
- ④ $6 \cdot 7 - 8 \cdot 9 = 42 - 72 = -30$
- ⑤ $7 \cdot 3 - 100/4 = 21 - 25 = -4$
- ⑥ $6 + 10/2 = 6 + 5 = 11$
- ⑦ $200/4/2 = 50/2 = 25$
- ⑧ $40/8 - 18/3 = 5 - 6 = -1$

Theorie

OK

Opl

Oefening 2 - Uitwerking

We voeren eerst de bewerkingen tussen de haakjes uit, daarna hebben vermenigvuldigen en delen voorrang op optelling en aftrekking; bijgevolg is

- ① $(4 + 5) \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18$
- ② $(3 + 6) \cdot (4 + 9) = 9 \cdot 13 = 117$
- ③ $(3 + 6) \cdot (4 - 9) = 9 \cdot (-5) = -45$
- ④ $(3 + 6)/(2 + 1) = 9/3 = 3$
- ⑤ $3 + 6/(2 + 1) = 3 + 6/3 = 3 + 2 = 5$
- ⑥ $(3 + 7)/2 + 2 = 10/2 + 2 = 5 + 2 = 7$
- ⑦ $3 + 6/2 + 1 = 3 + 3 + 1 = 7$
- ⑧ $9 - 8/(2 + 2) + 5 \cdot (4 + 1) = 9 - 8/4 + 5 \cdot 5 = 9 - 2 + 25 = 32$
- ⑨ $(4 + 5) \cdot 2 - 4 + 5 \cdot 2 = 9 \cdot 2 - 4 + 5 \cdot 2 = 18 - 4 + 10 = 24$

Theorie

OK

Opl

Oefening 3 - Uitwerking

- ① $1/3 + \frac{8}{3} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{9}{3} = 3$
- ② $2/3 + 4/5 = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$
- ③ $(2/3) \cdot (4/5) = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$
- ④ $\frac{1}{9} - \frac{2}{5} = \frac{5}{45} - \frac{18}{45} = \frac{5 - 18}{45} = -\frac{13}{45}$
- ⑤ $\frac{1}{-9} \cdot \frac{-3}{5} = \frac{1 \cdot (-3)}{(-9) \cdot 5} = \frac{-3}{-45} = \frac{1}{15}$
- ⑥ $(2/3)/(4/5) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$
- ⑦ $\frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{7}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$
- ⑧ $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{27}} = \frac{2 \cdot 27}{3 \cdot 8} = \frac{54}{24} = \frac{9}{4}$
- ⑨ $\frac{1 + 2 \cdot 3}{5 \cdot 2 + 9/3} = \frac{1 + 6}{10 + 3} = \frac{7}{13}$

Theorie

OK

Opl

Oefening 4 - Uitwerking

- ➊ $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
- ➋ $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$
- ➌ $5^3 - 2^5 + (-2)^3 = 125 - 32 - 8 = 85$
- ➍ $(1 + 2 \cdot 3)^2 = (1 + 6)^2 = 7^2 = 49$
- ➎ $2 \cdot 7^2 - 8 \cdot 6^2 = 2 \cdot 49 - 8 \cdot 36 = 98 - 288 = -190$
- ➏ $\sqrt{5 + 2 \cdot 2} = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3$
- ➐ $\sqrt{3^2 + 4 \cdot 4} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
- ➑ $\sqrt{4^3} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 4} = \sqrt{64} = 8$
- ➒ $\sqrt[5]{32} = 2$ omdat $2^5 = 32$
- ➓ $\sqrt{2/3} \cdot \sqrt{\frac{8}{27}} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{27}} = \sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}} = \frac{4}{9}$
- ➑ $\sqrt{9} + \sqrt[3]{27} - 5 \cdot \sqrt{81} = 3 + 3 - 5 \cdot 9 = 3 + 3 - 45 = -39$

Theorie

OK

Opl

Oefening 5 - Uitwerking

$$\begin{aligned}(1 + 2 \cdot 3)^2 &+ 2^3 \cdot (5 - 6)^5 + 2 \cdot 3^2 - 7/8 + \frac{\sqrt{\frac{8}{125}}}{\sqrt{\frac{5}{2}}} \\&= 7^2 + 8 \cdot (-1)^5 + 2 \cdot 9 - \frac{7}{8} + \sqrt{\frac{16}{625}} \\&= 49 - 8 + 18 - \frac{7}{8} + \frac{4}{25} \\&= 59 - \frac{7}{8} + \frac{4}{25} \\&= \frac{59 \cdot 200 - 7 \cdot 25 + 4 \cdot 8}{200} \\&= \frac{11800 - 175 + 32}{200} = \frac{11657}{200}\end{aligned}$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 6 - Uitwerking

Theorie

OK

Opl

Oefening 7 - Uitwerking

$$\begin{aligned} &(((1+2) \cdot 5)^2 + 7 + 2 \cdot 3^2)/(4^2 + \sqrt{81}) + 5 \\ &= ((3 \cdot 5)^2 + 7 + 2 \cdot 9)/(16 + 9) + 5 \\ &= (15^2 + 7 + 18)/25 + 5 \\ &= (225 + 25)/25 + 5 \\ &= 10 + 5 \\ &= 15. \end{aligned}$$

Theorie

OK

Opl

Algebra - Opgaven

Oefening 1 - Opgave



Werk uit:

- ① $a + (b + c)$
- ② $a + (b - c)$
- ③ $a - (b + c)$
- ④ $a - (b - c - d)$
- ⑤ $a - (-b + c - d) - (a + b)$
- ⑥ $-(a + b) + (b - c - d) + (a + b)$
- ⑦ $a + b - (b + c - d) - (-c + d)$

Theorie

Opl

Oefening 2 - Opgave



Werk uit:

- ① $(a + b) + (b + c) + (c + 2d)$
- ② $(a - b) + (b - c) - (c + 2d)$
- ③ $(a + b) - (b + c - d) + (c - 2d + a)$
- ④ $(a + c) + (b + c) + (c - 2d)$
- ⑤ $-(a + b) - (b + c) - (c - 2d)$
- ⑥ $-(a + b) + (-b + 3c) - (c - 2d + 3a)$
- ⑦ $-2 \cdot (a + b) + (-b + 3c) - 2 \cdot (c - 2d + 3a)$
- ⑧ $-(a + b) + 2 \cdot (-b + 3c) - (c - 2d + 3a)$
- ⑨ $-b \cdot (a + b) + a \cdot (-b + 3c) - c \cdot (c - 2d + 3a)$
- ⑩ $-a \cdot (a + b) + a \cdot (-b + 3c) - a \cdot (c - 2d + 3a)$

Theorie

Opl

Oefening 3 - Opgave



Werk uit:

- ① $(a + 1) \cdot (a + 2)$
- ② $(a + b) \cdot (a + c)$
- ③ $(a - b) \cdot (a - c)$
- ④ $(a + b + 1) \cdot (a + 2)$
- ⑤ $(a + b) \cdot (a + c) + (b + c) \cdot (a + c)$
- ⑥ $(a + b) \cdot (a + c) - (b + c) \cdot (a + c)$
- ⑦ $(a + b) \cdot (a + c) \cdot (a + 2)$
- ⑧ $(a + b + c) \cdot (a + c + 3)$
- ⑨ $(a - b + c) \cdot (a - c + 2d)$
- ⑩ $(a - b + 2) \cdot (a + b - 2) \cdot (a - b - 2)$

Theorie

Opl

Oefening 4 - Opgave



Bereken:

- ➊ 4^3
- ➋ 4^{-3}
- ➌ $(-4)^{-3}$
- ➍ -4^{-3}
- ➎ $8^{1/3}$
- ➏ $(-32)^{1/5}$
- ➐ $32^{1/2}$
- ➑ $16^{3/4}$
- ➒ $\left(\frac{9}{16}\right)^{1/2}$
- ➓ $\left(\frac{16}{625}\right)^{-3/4}$
- ➔ $(6^{-2})^{-1}$
- ➕ $\frac{1}{5^{-3}}$

Theorie

Opl

Oefening 5 - Opgave



Werk uit:

- ➊ $(a + 5)^2$
- ➋ $(a - 2)^2$
- ➌ $(a + 2b)^2$
- ➍ $(3a - 5b)^2$
- ➎ $(a + b - c)^2$
- ➏ $(a - b - 2c)^2$
- ➐ $(a + 3b)^3$
- ➑ $(a - 2b)^3$
- ➒ $(a - 3b + 1)^3$
- ➓ $(2a - 3b + 1)^3$

Theorie

Opl

Oefening 6 - Opgave



Werk uit:

- 1 $\frac{a+1}{3} + \frac{b-1}{3}$
- 2 $\frac{a+1}{2} + \frac{b-1}{3}$
- 3 $\frac{a+1}{2} - \frac{b-1}{3}$
- 4 $\frac{a+1}{a-1} + \frac{b-1}{a-1}$
- 5 $\frac{a+1}{a-1} + \frac{b-1}{a+1}$
- 6 $\frac{a+1}{b-1} - \frac{b-1}{a+1}$
- 7 $\frac{a^2-1}{a^2+1} + \frac{a^2-1}{2a}$
- 8 $-\frac{a+b}{2a} + \frac{b-1}{3}$
- 9 $(\frac{a+1}{2})^2 + \frac{b-1}{3a^2}$
- 10 $\frac{a+b}{a-b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{a-c}{a+c}$

Theorie

Opl

Oefening 7 - Opgave



Werk uit:

- ➊ $\frac{a+1}{3} \cdot \frac{b-1}{3}$
- ➋ $\frac{a+1}{2} \cdot \frac{b-1}{3}$
- ➌ $\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-1}{3}\right)^2$
- ➍ $\frac{a+1}{a-1} \cdot \frac{b-1}{a-1}$
- ➎ $\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 + \left(\frac{b-1}{a+1}\right)^2$
- ➏ $\frac{a+1}{b-1} \cdot \frac{b-1}{a+1}$
- ➐ $\frac{a^2-1}{a^2+1} \cdot \frac{a^2-1}{2a}$
- ➑ $-\frac{a+b}{2a} + \left(\frac{b-1}{3}\right)^2$
- ➒ $\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 \cdot \frac{b-1}{3a^2}$
- ➓ $\frac{a+b+c}{a-b+c} \cdot \frac{a+b-c}{a+b-c} - \left(\frac{a-b-c}{a-b-c}\right)^2$

Theorie

Opl

Oefening 8 - Opgave



Vereenvoudig:

- ❶ $a^{-2} \cdot a^3 \cdot a^{-1}$
- ❷ $a^2 b a^{-1} b^{-2} b$
- ❸ $\left(a^3 b \left(a^{-1} b c^2\right)^{-2}\right)^2$
- ❹ $\left(\frac{a^{-1} b^3}{c}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a^3 c^2}{b^{-2}}\right)^{-1}$
- ❺ $\left(\frac{a^{-2} \cdot b^3 \cdot c}{c^{-2} \cdot a^3 \cdot b^{-1}}\right)^{-2}$
- ❻ $\frac{(a^3 b^{-1})^2 (a^2 b^{-4})^{-2}}{(-a^2 b^{-4})^2 (-a^3 b^{-2})^{-3}}$
- ❼ $\frac{a + b}{a^{-1} + b^{-1}}$
- ❽ $\frac{\left((a^2 b^{-1})^3\right)^{-2} \left((a^2 b^{-2})^2\right)^{-3}}{(-a^4 b^3)^{-2} (-a^3 b^2)^{-3}}$

Theorie

Opl

Oefening 9 - Opgave



Vereenvoudig:

❶

$$\sqrt[3]{a^6},$$

$$\sqrt{a^6},$$

$$\sqrt[4]{a^{16}},$$

$$\sqrt[3]{64},$$

$$\sqrt[3]{27},$$

$$\sqrt[5]{2^6 3^5},$$

$$\sqrt[4]{3^6 4^4},$$

$$\sqrt[6]{128}$$

❷

$$\sqrt[3]{a^5 b^3},$$

$$\sqrt{a^2 b^3 c^4},$$

$$\sqrt[3]{a^{10} b^4 c^7},$$

$$\sqrt[4]{a^3 b^4 c^5},$$

$$\sqrt[5]{32 a^7 b^{12}},$$

$$\sqrt[6]{a^{6x} b^{12y} c^{19z}}$$

❸

$$\sqrt[n]{a^{n+2}},$$

$$\sqrt[n]{a^{2n}},$$

$$\sqrt[n]{a^{2n+1}},$$

$$\sqrt[n]{a^{4n+2}},$$

$$\sqrt[n]{a^{n^2}},$$

$$\sqrt[n]{a^{n^2-n}},$$

$$\sqrt[n+1]{a^{n^2+2n+1}}$$

❹

$$\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^3}},$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}},$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^{10}}{b^5}},$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3c^6}},$$

$$\sqrt[5]{\frac{3^5a^{10}}{b^5}},$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^{12}c^6}{b^7}},$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^{12}c^{11}}{c^2}}$$

5

$$\sqrt[3]{16a - 24},$$

$$\sqrt[3]{27a + 54},$$

$$\sqrt{a^2 + 4},$$

$$\sqrt[4]{a^2 + 2ab + b^2}$$

6

$$\sqrt{\sqrt[3]{25a^4}},$$

$$\sqrt{a\sqrt[5]{a^3}},$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{(a+b)^9}},$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{30}a^{15}b^{20}}},$$

$$\sqrt{\sqrt[4]{2^8a^{16}b^{24}}}$$

7

$$\sqrt[4]{16^5},$$

$$\sqrt[3]{27^4},$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{16}{81}\right)^q},$$

$$\sqrt[3]{(216b^3)^2},$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{125}{64}\right)^r}$$

8

$$\sqrt{\sqrt[3]{256a^4x^8}},$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^2 + 2ab + b^2}},$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x^{24}y^{36}z^{48}}}}$$

Theorie

Opl

Oefening 10 - Opgave



Werk uit en vereenvoudig:

- 1 $\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 3\sqrt{a},$
- 2 $\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{a^4},$
- 3 $\sqrt{9a} - \sqrt{4a} + \sqrt{a},$
- 4 $\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250},$
- 5 $\sqrt[6n]{ab} - \sqrt[30n]{a^5b^5},$
- 6 $\sqrt[3]{56} - \sqrt[3]{189} + 3\sqrt[3]{448},$
- 7 $\sqrt{1100} + \sqrt{44} - \sqrt{99},$
- 8 $\sqrt[3]{24a^4} + \sqrt[3]{3a^4b^3} - \sqrt[3]{81ab^6},$
- 9 $2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125} - 4\sqrt{20},$
- 10 $2\sqrt{24} \cdot 3\sqrt[4]{18} \cdot 4\sqrt[6]{24},$
- 11 $\sqrt[5]{54} \cdot 3\sqrt[5]{16} \cdot (-2\sqrt[5]{9}),$
- 12 $\sqrt{343} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[5]{49},$
- 13 $3a\sqrt{2abc} \cdot 2ab\sqrt[6]{ab^5} \cdot 5b \cdot \sqrt[4]{8a^3bc^2},$
- 14 $\sqrt{5}(\sqrt{2} - \sqrt{5} + 2\sqrt{10}),$
- 15 $(\sqrt{14} + \sqrt{21} + 2\sqrt{6}) \cdot \sqrt{42},$
- 16 $(6\sqrt[4]{216} + 6\sqrt{6} - 6\sqrt[4]{6} + 6) \cdot (-\sqrt[4]{216}),$
- 17 $(\sqrt{5} + 2\sqrt[3]{6}) \cdot (\sqrt{5} - 2\sqrt[3]{6}),$
- 18 $(\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^2$

Theorie

Opl

Algebra - Oplossing

Oefening 1 - Oplossing

- ① $a + (b + c) = a + b + c$
- ② $a + (b - c) = a + b - c$
- ③ $a - (b + c) = a - b - c$
- ④ $a - (b - c - d) = a - b + c + d$
- ⑤ $a - (-b + c - d) - (a + b) = -c + d$
- ⑥ $-(a + b) + (b - c - d) + (a + b) = b - c - d$
- ⑦ $a + b - (b + c - d) - (-c + d) = a$

Theorie

OK

Detail

Oefening 2 - Oplossing

- ① $(a + b) + (b + c) + (c + 2d) = a + 2b + 2c + 2d$
- ② $(a - b) + (b - c) - (c + 2d) = a - 2c - 2d$
- ③ $(a + b) - (b + c - d) + (c - 2d + a) = 2a - d$
- ④ $(a + c) + (b + c) + (c - 2d) = a + b + 3c - 2d$
- ⑤ $-(a + b) - (b + c) - (c - 2d) = -a - 2b - 2c + 2d$
- ⑥ $-(a + b) + (-b + 3c) - (c - 2d + 3a) = -4a - 2b + 2c + 2d$
- ⑦ $-2 \cdot (a + b) + (-b + 3c) - 2 \cdot (c - 2d + 3a) = -8a - 3b + c + 4d$
- ⑧ $-(a + b) + 2 \cdot (-b + 3c) - (c - 2d + 3a) = -4a - 3b + 5c + 2d$
- ⑨ $-b \cdot (a + b) + a \cdot (-b + 3c) - c \cdot (c - 2d + 3a) = -2ab - b^2 - c^2 + 2cd$
- ⑩ $-a \cdot (a + b) + a \cdot (-b + 3c) - a \cdot (c - 2d + 3a) = a \cdot (-4a - 2b + 2c + 2d)$

Theorie

OK

Detail

Oefening 3 - Oplossing

- ① $(a + 1) \cdot (a + 2) = a^2 + 3a + 2$
- ② $(a + b) \cdot (a + c) = a^2 + ab + ac + bc$
- ③ $(a - b) \cdot (a - c) = a^2 - ab - ac + bc$
- ④ $(a + b + 1) \cdot (a + 2) = a^2 + ab + 3a + 2b + 2$
- ⑤ $(a + b) \cdot (a + c) + (b + c) \cdot (a + c) = a^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2$
- ⑥ $(a + b) \cdot (a + c) - (b + c) \cdot (a + c) = a^2 - c^2$
- ⑦ $(a + b) \cdot (a + c) \cdot (a + 2) = a^3 + a^2b + a^2c + abc + 2a^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- ⑧ $(a + b + c) \cdot (a + c + 3) = a^2 + ab + 2ac + bc + c^2 + 3a + 3b + 3c$
- ⑨ $(a - b + c) \cdot (a - c + 2d) = a^2 - ab + bc - c^2 + 2ad - 2bd + 2cd$
- ⑩ $(a - b + 2) \cdot (a + b - 2) \cdot (a - b - 2)$
 $= a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - 2a^2 + 4ab - 2b^2 - 4a - 4b + 8$

Theorie

OK

Detail

Oefening 4 - Oplossing

- ➊ $4^3 = 64$
- ➋ $4^{-3} = \frac{1}{64}$
- ➌ $(-4)^{-3} = -\frac{1}{64}$
- ➍ $-4^{-3} = -\frac{1}{64}$
- ➎ $8^{1/3} = 2$
- ➏ $(-32)^{1/5} = -2$
- ➐ $32^{1/2} = 4\sqrt{2}$
- ➑ $16^{3/4} = 8$
- ➒ $\left(\frac{9}{16}\right)^{1/2} = \frac{3}{4}$
- ➓ $\left(\frac{16}{625}\right)^{-3/4} = \frac{125}{8}$
- ➔ $(6^{-2})^{-1} = 36$
- ➕ $\frac{1}{5^{-3}} = 125$

Theorie

OK

Detail

Oefening 5 - Oplossing

- ➊ $(a + 5)^2 = a^2 + 10a + 25$
- ➋ $(a - 2)^2 = a^2 - 4a + 4$
- ➌ $(a + 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$
- ➍ $(3a - 5b)^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2$
- ➎ $(a + b - c)^2 = a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2$
- ➏ $(a - b - 2c)^2 = a^2 - 2ab + b^2 - 4ac + 4bc + 4c^2$
- ➐ $(a + 3b)^3 = a^3 + 9a^2b + 27ab^2 + 27b^3$
- ➑ $(a - 2b)^3 = a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$
- ➒ $(a - 3b + 1)^3$
 $= a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3 + 3a^2 - 18ab + 27b^2 + 3a - 9b + 1$
- ➓ $(2a - 3b + 1)^3$
 $= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 + 12a^2 - 36ab + 27b^2 + 6a - 9b + 1$

Theorie

OK

Detail

Oefening 6 - Oplossing

- ① $\frac{a+1}{3} + \frac{b-1}{3} = \frac{a+b}{3}$
- ② $\frac{a+1}{2} + \frac{b-1}{3} = \frac{3a+2b+1}{6}$
- ③ $\frac{a+1}{2} - \frac{b-1}{3} = \frac{3a-2b+5}{6}$
- ④ $\frac{a+1}{a-1} + \frac{b-1}{a-1} = \frac{a+b}{a-1}$
- ⑤ $\frac{a+1}{a-1} + \frac{b-1}{a+1} = \frac{a^2+ab+a-b+2}{a^2-1}$
- ⑥ $\frac{a+1}{b-1} - \frac{b-1}{a+1} = \frac{a^2+2a-b^2+2b}{(a+1)(b-1)}$
- ⑦ $\frac{a^2-1}{a^2+1} + \frac{a^2-1}{2a} = \frac{a^4+2a^3-2a-1}{2a^3+2a}$
- ⑧ $-\frac{a+b}{2a} + \frac{b-1}{3} = \frac{2ab-5a-3b}{6a}$
- ⑨ $(\frac{a+1}{2})^2 + \frac{b-1}{3a^2} = \frac{3a^4+6a^3+3a^2+4b-4}{12a^2}$
- ⑩ $\frac{a+b}{a-b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{a-c}{a+c}$
 $= \frac{3a^2b+2abc+a^2c-ab^2-ac^2+b^2c+3bc^2}{(a-b)(b+c)(a+c)}$

Theorie

OK

Detail

Oefening 7 - Oplossing

Theorie

OK

Detail

Oefening 8 - Oplossing

- ① $a^{-2} \cdot a^3 \cdot a^{-1} = 1$
- ② $a^2 b a^{-1} b^{-2} b = a$
- ③ $\left(a^3 b \left(a^{-1} b c^2\right)^{-2}\right)^2 = a^{10} b^{-2} c^{-8}$
- ④ $\left(\frac{a^{-1} b^3}{c}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a^3 c^2}{b^{-2}}\right)^{-1} = \frac{1}{ab^8}$
- ⑤ $\left(\frac{a^{-2} \cdot b^3 \cdot c}{c^{-2} \cdot a^3 \cdot b^{-1}}\right)^{-2} = \frac{a^{10}}{b^8 c^6}$
- ⑥ $\frac{(a^3 b^{-1})^2 (a^2 b^{-4})^{-2}}{(-a^2 b^{-4})^2 (-a^3 b^{-2})^{-3}} = -a^7 b^8$
- ⑦ $\frac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}} = ab$
- ⑧ $\frac{\left((a^2 b^{-1})^3\right)^{-2} \left((a^2 b^{-2})^2\right)^{-3}}{(-a^4 b^3)^{-2} (-a^3 b^2)^{-3}} = -\frac{b^{30}}{a^7}$

Theorie

OK

Detail

Oefening 9 - Oplossing

- 1

$$\sqrt[3]{a^6} = a^2,$$

$$\sqrt{a^6} = |a|^3,$$

$$\sqrt[4]{a^{16}} = a^4,$$

$$\sqrt[3]{64} = 4,$$

$$\sqrt[3]{27} = 3,$$

$$\sqrt[5]{2^6 3^5} = 6\sqrt[5]{2},$$

$$\sqrt[4]{3^6 4^4} = 12\sqrt{3},$$

$$\sqrt[6]{128} = 2\sqrt[6]{2}$$
- 2

$$\sqrt[3]{a^5 b^3} = a \cdot b \cdot a^{2/3},$$

$$\sqrt{a^2 b^3 c^4} = |a| \cdot |b| \sqrt{b} \cdot c^2,$$

$$\sqrt[3]{a^{10} b^4 c^7} = a^3 b c^2 \sqrt[3]{abc},$$

$$\sqrt[4]{a^3 b^4 c^5} = bc \sqrt[4]{a^3 c},$$

$$\sqrt[5]{32 a^7 b^{12}} = 2ab^2 \sqrt[5]{a^2 b^2},$$

$$\sqrt[6]{a^{6x} b^{12y} c^{19z}} = a^x b^{2y} c^{3z} \sqrt[6]{c^z}$$
- 3

$$\sqrt[n]{a^{n+2}} = a \sqrt[n]{a^2},$$

$$\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2,$$

$$\sqrt[n]{a^{2n+1}} = a^2 \sqrt[n]{a},$$

$$\sqrt[n]{a^{4n+2}} = a^4 \sqrt[n]{a^2},$$

$$\sqrt[n]{a^{n^2}} = a^n,$$

$$\sqrt[n]{a^{n^2-n}} = a^{n-1},$$

$$\sqrt[n+1]{a^{n^2+2n+1}} = a^{n+1}$$
- 4

$$\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^3}} = \frac{a \sqrt[3]{a}}{b},$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^{10}}{b^5}} = \frac{a^2}{b},$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3c^6}} = \frac{a}{bc^2},$$

$$\sqrt[5]{\frac{3^5a^{10}}{b^5}} = \frac{3a^2}{b},$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^{12}c^6}{b^7}} = \frac{a^2c\sqrt[5]{a^2c}}{b\sqrt[5]{b^2}},$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^{12}c^{11}}{c^2}} = a^{12/3}c^{9/3} = a^4c^3$$

5 $\sqrt[3]{16a-24} = 2\sqrt[3]{2a-3},$

$$\sqrt[3]{27a+54} = 3\sqrt[3]{a+2},$$

$$\sqrt{a^2+4},$$

$$\sqrt[4]{a^2+2ab+b^2} = \sqrt{a+b}$$

6 $\sqrt{\sqrt[3]{25a^4}} = \sqrt[3]{5a^2},$

$$\sqrt{a\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[5]{a^4},$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{(a+b)^9}} = (a+b)\sqrt{a+b},$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{30}a^{15}b^{20}}} = 4ab\sqrt[3]{b},$$

$$\sqrt{\sqrt[4]{2^8a^{16}b^{24}}} = 2a^2b^3$$

7 $\sqrt[4]{16^5} = 32,$

$$\sqrt[3]{27^4} = 81,$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{16}{81}\right)^q} = \left(\frac{2}{3}\right)^q,$$

$$\sqrt[3]{(216b^3)^2} = 36b^2,$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{125}{64}\right)^r} = \left(\frac{5}{4}\right)^r$$

8 $\sqrt{\sqrt[3]{256a^4x^8}} = 2x\sqrt[3]{2a^2x},$

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^2+2ab+b^2}} = \sqrt[3]{a+b},$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x^{24}y^{36}z^{48}}}} = xyz^2\sqrt{y}$$

Theorie

OK

Detail

Oefening 10 - Oplossing

- ① $\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = 2\sqrt{a},$
- ② $\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{a^4} = (1 + 2a)\sqrt[3]{a},$
- ③ $\sqrt{9a} - \sqrt{4a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a},$
- ④ $\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2},$
- ⑤ $\sqrt[6n]{ab} - \sqrt[30n]{a^5b^5} = 0,$
- ⑥ $\sqrt[3]{56} - \sqrt[3]{189} + 3\sqrt[3]{448} = 11\sqrt[3]{7},$
- ⑦ $\sqrt{1100} + \sqrt{44} - \sqrt{99} = 9\sqrt{11},$
- ⑧ $\sqrt[3]{24a^4} + \sqrt[3]{3a^4b^3} - \sqrt[3]{81ab^6} = (2a + ab - 3b^2)\sqrt[3]{3a},$
- ⑨ $2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125} - 4\sqrt{20} = -9\sqrt{5},$
- ⑩ $2\sqrt{24} \cdot 3\sqrt[4]{18} \cdot 4\sqrt[6]{24}$
 $= 288\sqrt[4]{2}\sqrt[6]{3}$
- ⑪ $\sqrt[5]{54} \cdot 3\sqrt[5]{16} \cdot (-2\sqrt[5]{9}) = -36$
- ⑫ $\sqrt{343} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[5]{49} = 49\sqrt[20]{7^3},$
- ⑬ $3a\sqrt{2abc} \cdot 2ab \cdot \sqrt[6]{ab^5} \cdot 5b \cdot \sqrt[4]{8a^3bc^2} = 60\sqrt[2]{2}a^3b^3c\sqrt[12]{a^5b^7}$
- ⑭ $\sqrt{5}(\sqrt{2} - \sqrt{5} + 2\sqrt{10}) = \sqrt{10} - 5 + 10\sqrt{2}$
- ⑮ $(\sqrt{14} + \sqrt{21} + 2\sqrt{6}) \cdot \sqrt{42} = 14\sqrt{3} + 21\sqrt{2} + 12\sqrt{7}$
- ⑯ $(6\sqrt[4]{216} + 6\sqrt{6} - 6\sqrt[4]{6} + 6) \cdot (-\sqrt[4]{216}) = -36\sqrt{6} - 36\sqrt[4]{6} + 36 - 6\sqrt[4]{6^3}$
- ⑰ $(\sqrt{5} + 2\sqrt[3]{6}) \cdot (\sqrt{5} - 2\sqrt[3]{6}) = 5 - 4\sqrt[3]{36}$
- ⑱ $(\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^2 = 29 - 4\sqrt{30}$

Theorie

OK

Detail

Algebra - Uitwerking

Oefening 1 - Uitwerking

Herleiden we elk verschil tot een som, en schrijven we de tegengestelden van de sommen uit, dan bekomen we

- ①
$$\begin{aligned} a + (b + c) \\ = a + b + c \end{aligned}$$
- ②
$$\begin{aligned} a + (b - c) \\ = a + b + (-c) \\ = a + b - c \end{aligned}$$
- ③
$$\begin{aligned} a - (b + c) \\ = a + (-(b + c)) \\ = a + (-b) + (-c) \\ = a - b - c \end{aligned}$$
- ④
$$\begin{aligned} a - (b - c - d) \\ = a + (-(b + (-c) + (-d))) \\ = a + (-b) + (-(-c)) + (-(-d)) \\ = a - b + c + d \end{aligned}$$
- ⑤
$$\begin{aligned} a - (-b + c - d) - (a + b) \\ = a + b - c + d - a - b \\ = -c + d \end{aligned}$$
- ⑥
$$-(a + b) + (b - c - d) + (a + b)$$

$$\begin{aligned}
&= -a - b + b - c - d + a + b \\
&= b - c - d \\
\textcircled{7} \quad &a + b - (b + c - d) - (-c + d) \\
&= a + b - b - c + d + c - d \\
&= a
\end{aligned}$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 2 - Uitwerking

- ① $(a + b) + (b + c) + (c + 2d)$
 $= a + b + b + c + c + 2d = a + 2b + 2c + 2d$
- ② $(a - b) + (b - c) - (c + 2d)$
 $= a - b + b - c - c - 2d = a - 2c - 2d$
- ③ $(a + b) - (b + c - d) + (c - 2d + a)$
 $= a + b - b - c + d + c - 2d + a = 2a - d$
- ④ $(a + c) + (b + c) + (c - 2d)$
 $= a + c + b + c + c - 2d = a + b + 3c - 2d$
- ⑤ $-(a + b) - (b + c) - (c - 2d)$
 $= -a - b - b - c - c + 2d = -a - 2b - 2c + 2d$
- ⑥ $-(a + b) + (-b + 3c) - (c - 2d + 3a)$
 $= -a - b - b + 3c - c + 2d - 3a = -4a - 2b + 2c + 2d$
- ⑦ $-2 \cdot (a + b) + (-b + 3c) - 2 \cdot (c - 2d + 3a)$
 $= -2a - 2b - b + 3c - 2c + 4d - 6a$
 $= -8a - 3b + c + 4d$
- ⑧ $-(a + b) + 2 \cdot (-b + 3c) - (c - 2d + 3a)$
 $= -a - b - 2b + 6c - c + 2d - 3a$
 $= -4a - 3b + 5c + 2d$
- ⑨ $-b \cdot (a + b) + a \cdot (-b + 3c) - c \cdot (c - 2d + 3a)$
 $= -ab - b^2 - ab + 3ac - c^2 + 2cd - 3ac$
 $= -2ab - b^2 - c^2 + 2cd$
- ⑩ $-a \cdot (a + b) + a \cdot (-b + 3c) - a \cdot (c - 2d + 3a)$
 $= -a^2 - ab - ab + 3ac - ac + 2ad - 3a^2$
 $= -4a^2 - 2ab + 2ac + 2ad$
 $= a \cdot (-4a - 2b + 2c + 2d)$

Theorie OK Opl

Oefening 3 - Uitwerking

- 1**
$$\begin{aligned}(a+1) \cdot (a+2) &= a \cdot a + a \cdot 2 + 1 \cdot a + 1 \cdot 2 \\ &= a^2 + (2+1) \cdot a + 2 \\ &= a^2 + 3a + 2\end{aligned}$$
- 2**
$$\begin{aligned}(a+b) \cdot (a+c) &= a^2 + ba + ac + bc \\ &= a^2 + ab + ac + bc\end{aligned}$$
- 3**
$$\begin{aligned}(a-b) \cdot (a-c) &= a^2 - ba - ac + bc \\ &= a^2 - ab - ac + bc\end{aligned}$$
- 4**
$$\begin{aligned}(a+b+1) \cdot (a+2) &= a^2 + ba + a + 2a + 2b + 2 \\ &= a^2 + ab + 3a + 2b + 2\end{aligned}$$
- 5**
$$\begin{aligned}(a+b) \cdot (a+c) + (b+c) \cdot (a+c) &= a^2 + ba + ac + bc + ba + ca + bc + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2\end{aligned}$$
- 6**
$$\begin{aligned}(a+b) \cdot (a+c) - (b+c) \cdot (a+c) &= a^2 + ab + ac + bc - ab - ac - bc - c^2 \\ &= a^2 - c^2\end{aligned}$$
- 7**
$$\begin{aligned}(a+b) \cdot (a+c) \cdot (a+2) &= (a+b) \cdot (a^2 + ac + 2a + 2c) \\ &= a^3 + a^2b + a^2c + abc + 2a^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$
- 8**
$$\begin{aligned}(a+b+c) \cdot (a+c+3) &= a^2 + ba + ca + ac + bc + c^2 + 3a + 3b + 3c \\ &= a^2 + ab + 2ac + bc + c^2 + 3a + 3b + 3c\end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}
& (a - b + c) \cdot (a - c + 2d) \\
&= a^2 - ab + ac - ac + bc - c^2 + 2ad - 2bd + 2cd \\
&= a^2 - ab + bc - c^2 + 2ad - 2bd + 2cd
\end{aligned}$$

10

$$\begin{aligned}
& (a - b + 2) \cdot (a + b - 2) \cdot (a - b - 2) \\
&= (a - b + 2)(a^2 + ab - 2a - ab - b^2 + 2b - 2a - 2b + 4) \\
&= (a - b + 2)(a^2 - b^2 - 4a + 4) \\
&= a^3 - a^2b + 2a^2 - ab^2 + b^3 - 2b^2 - 4a^2 + 4ab - 8a + 4a - 4b + 8 \\
&= a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - 2a^2 + 4ab - 2b^2 - 4a - 4b + 8
\end{aligned}$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 4 - Uitwerking

- ➊ $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
- ➋ $4^{-3} = (4^3)^{-1} = \frac{1}{64}$
- ➌ $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{-64} = -\frac{1}{64}$
- ➍ $-4^{-3} = -\frac{1}{4^3} = -\frac{1}{64}$
- ➎ $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$
- ➏ $(-32)^{1/5} = \sqrt[5]{-32} = -2$
- ➐ $32^{1/2} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
- ➑ $16^{3/4} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$
- ➒ $\frac{\left(\frac{9}{16}\right)^{1/2}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{\frac{9}{16}}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$
- ➓ $\begin{aligned} \left(\frac{16}{625}\right)^{-3/4} &= \left(\sqrt[4]{\frac{16}{625}}\right)^{-3} = \left(\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{625}}\right)^{-3} \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{2^3}{5^3}\right)^{-1} = \left(\frac{8}{125}\right)^{-1} = \frac{125}{8} \end{aligned}$
- ➔ $(6^{-2})^{-1} = 6^{(-2) \cdot (-1)} = 6^2 = 36$
- ➕ $\frac{1}{5^{-3}} = (5^{-3})^{-1} = 5^{(-3) \cdot (-1)} = 5^3 = 125$

Theorie

OK

Opl

Oefening 5 - Uitwerking

- 1 $(a + 5)^2$
 $= a^2 + 2 \cdot a \cdot 5 + 5^2$
 $= a^2 + 10a + 25$
- 2 $(a - 2)^2$
 $= a^2 + 2 \cdot a \cdot (-2) + (-2)^2$
 $= a^2 - 4a + 4$
- 3 $(a + 2b)^2$
 $= a^2 + 2 \cdot a \cdot 2b + (2b)^2$
 $= a^2 + 4ab + 4b^2$
- 4 $(3a - 5b)^2$
 $= (3a)^2 + 2 \cdot (3a) \cdot (-5b) + (-5b)^2$
 $= 9a^2 - 30ab + 25b^2$
- 5 $(a + b - c)^2$
 $= a^2 + 2 \cdot a \cdot (b - c) + (b - c)^2$
 $= a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2$
- 6 $(a - b - 2c)^2$
 $= ((a - b) - (2c))^2$
 $= (a - b)^2 - 2 \cdot (a - b) \cdot (2c) + (2c)^2$
 $= a^2 - 2ab + b^2 - 4ac + 4bc + 4c^2$
- 7 $(a + 3b)^3$
 $= a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 3b + 3 \cdot a \cdot (3b)^2 + (3b)^3$
 $= a^3 + 9a^2b + 27ab^2 + 27b^3$
- 8 $(a - 2b)^3$
 $= a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot (-2b) + 3 \cdot a \cdot (-2b)^2 + (-2b)^3$
 $= a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$

$$\begin{aligned}
&\textcircled{9} \quad (a - 3b + 1)^3 \\
&\quad = (a - 3b)^3 + 3(a - 3b)^2 + 3(a - 3b) + 1 \\
&\quad = a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3 + 3a^2 - 18ab + 27b^2 + 3a - 9b + 1 \\
&\textcircled{10} \quad (2a - 3b + 1)^3 \\
&\quad = (2a - 3b)^3 + 3(2a - 3b)^2 + 3(2a - 3b) + 1 \\
&\quad = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 + 12a^2 - 36ab + 27b^2 + 6a - 9b + 1
\end{aligned}$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 6 - Uitwerking

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \quad & \frac{a+1}{3} + \frac{b-1}{3} \\ &= \frac{(a+1) + (b-1)}{3} = \frac{a+b}{3} \\ \textcircled{2} \quad & \frac{a+1}{2} + \frac{b-1}{3} \\ &= \frac{3(a+1)}{6} + \frac{2(b-1)}{6} \\ &= \frac{3a+3+2b-2}{6} = \frac{3a+2b+1}{6} \\ \textcircled{3} \quad & \frac{a+1}{2} - \frac{b-1}{3} \\ &= \frac{3(a+1) - 2(b-1)}{6} \\ &= \frac{3a-2b+5}{6} \\ \textcircled{4} \quad & \frac{a+1}{a-1} + \frac{b-1}{a-1} \\ &= \frac{(a+1) + (b-1)}{a-1} \\ &= \frac{a+b}{a-1} \\ \textcircled{5} \quad & \frac{a+1}{a-1} + \frac{b-1}{a+1} \\ &= \frac{(a+1)(a+1) + (b-1)(a-1)}{(a-1)(a+1)} \\ &= \frac{a^2 + 2a + 1 + ab - a - b + 1}{a^2 - 1} \\ &= \frac{a^2 + ab + a - b + 2}{a^2 - 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{6} \quad & \frac{a+1}{b-1} - \frac{b-1}{a+1} \\
&= \frac{(a+1)^2 - (b-1)^2}{(a+1)(b-1)} \\
&= \frac{a^2 + 2a - b^2 + 2b}{(a+1)(b-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{7} \quad & \frac{a^2-1}{a^2+1} + \frac{a^2-1}{2a} \\
&= \frac{2a(a^2-1) + (a^2+1)(a^2-1)}{2a(a^2+1)} \\
&= \frac{a^4 + 2a^3 - 2a - 1}{2a^3 + 2a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{8} \quad & -\frac{a+b}{2a} + \frac{b-1}{3} \\
&= \frac{-3a - 3b + 2ab - 2a}{6a} \\
&= \frac{2ab - 5a - 3b}{6a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{9} \quad & \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{b-1}{3a^2} \\
&= \frac{(a+1)^2}{4} + \frac{b-1}{3a^2} \\
&= \frac{3a^2(a+1)^2 + 4(b-1)}{12a^2} \\
&= \frac{3a^4 + 6a^3 + 3a^2 + 4b - 4}{12a^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{10} \quad & \frac{a+b}{a-b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{a-c}{a+c} \\
&= \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{(a-b)(b+c)(a+c)} + \frac{(b-c)(a-b)(a+c)}{(a-b)(b+c)(a+c)} + \frac{(a-c)(a-b)(b+c)}{(a-b)(b+c)(a+c)} \\
&= \frac{(a+b)(b+c)(a+c) + (b-c)(a-b)(a+c) + (a-c)(a-b)(b+c)}{(a-b)(b+c)(a+c)} \\
&= \frac{3a^2b + 2abc + a^2c - ab^2 - ac^2 + b^2c + 3bc^2}{(a-b)(b+c)(a+c)}
\end{aligned}$$

Theorie OK Opl

Oefening 7 - Uitwerking

Theorie

OK

Opl

Oefening 8 - Uitwerking

$$\textcircled{1} \quad a^{-2} \cdot a^3 \cdot a^{-1} = a^{-2+3+(-1)} = a^0 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad a^2 b a^{-1} b^{-2} b = a^{2-1} b^{1+(-2)+1} \\ = a^1 b^0 = a$$

$$\textcircled{3} \quad \left(a^3 b (a^{-1} b c^2)^{-2} \right)^2 \\ = \left(a^3 b (a^{(-1) \cdot (-2)} b^{-2} c^{2 \cdot (-2)}) \right)^2 \\ = \left(a^3 b (a^2 b^{-2} c^{-4}) \right)^2 \\ = \left(a^{3+2} b^{1+(-2)} c^{-4} \right)^2 \\ = a^{5 \cdot 2} b^{(-1) \cdot 2} c^{(-4) \cdot 2} = a^{10} b^{-2} c^{-8}$$

$$\textcircled{4} \quad \left(\frac{a^{-1} b^3}{c} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{a^3 c^2}{b^{-2}} \right)^{-1} \\ = \frac{a^{(-1) \cdot (-2)} b^{3 \cdot (-2)}}{c^{1 \cdot -2}} \cdot \frac{a^{3 \cdot -1} c^{2 \cdot -1}}{b^{(-2) \cdot (-1)}} \\ = \frac{a^2 b^{-6} a^{-3} c^{-2}}{c^{-2} b^2} = a^2 b^{-6} a^{-3} c^{-2} c^2 b^{-2} \\ = a^{2-3} b^{-6-2} c^{-2+2} = a^{-1} b^{-8} = \frac{1}{ab^8}$$

$$\textcircled{5} \quad \left(\frac{a^{-2} \cdot b^3 \cdot c}{c^{-2} \cdot a^3 \cdot b^{-1}} \right)^{-2} \\ = \left(a^{-2} \cdot b^3 \cdot c \cdot c^2 \cdot a^{-3} \cdot b \right)^{-2} \\ = \left(a^{-5} \cdot b^4 \cdot c^3 \right)^{-2} \\ = a^{10} \cdot b^{-8} \cdot c^{-6} = \frac{a^{10}}{b^8 c^6}$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{(a^3 b^{-1})^2 (a^2 b^{-4})^{-2}}{(-a^2 b^{-4})^2 (-a^3 b^{-2})^{-3}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^6 b^{-2} a^{-4} b^8}{(-1)^2 a^4 b^{-8} (-1)^{-3} a^{-9} b^6} \\
&= \frac{a^2 b^6}{a^{-5} b^{-2} (-1)} \\
&= -a^7 b^8 \\
\textcircled{7} \quad &= \frac{a+b}{a^{-1} + b^{-1}} \\
&= \frac{a+b}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \\
&= \frac{a+b}{\frac{b+a}{ab}} \\
&= (a+b)ab \\
&= \frac{b+a}{ab} \\
\textcircled{8} \quad &= \frac{\left((a^2 b^{-1})^3\right)^{-2} \left((a^2 b^{-2})^2\right)^{-3}}{(-a^4 b^3)^{-2} (-a^3 b^2)^{-3}} \\
&= \frac{(a^6 b^{-3})^{-2} (a^4 b^{-4})^{-3}}{(-1)^{-2} a^{-8} b^{-6} (-1)^{-3} a^{-9} b^{-6}} \\
&= \frac{a^{-12} b^6 a^{-12} b^{12}}{-a^{-17} b^{-12}} = -a^{-24} b^{18} a^{17} b^{12} = -a^{-7} b^{30} = -\frac{b^{30}}{a^7}
\end{aligned}$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 9 - Uitwerking

①

$$\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2,$$

$$\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = |a^3| = |a|^3,$$

$$\sqrt[4]{a^{16}} = (a^{16})^{1/4} = a^{16/4} = a^4,$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4,$$

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3,$$

$$\sqrt[5]{2^6 3^5} = \sqrt[5]{2^2 2^4 3^5} = \sqrt[5]{2^2} \sqrt[5]{2^4} \sqrt[5]{3^5} = \sqrt[5]{2} \cdot 2 \cdot 3 = 6\sqrt[5]{2},$$

$$\sqrt[4]{3^6 4^4} = \sqrt[4]{3^2 3^4 4^4} = \sqrt[4]{3^2} \cdot 3 \cdot 4 = 12\sqrt[4]{3^2} = 12 \cdot 3^{2/4} = 12 \cdot 3^{1/2} = 12\sqrt{3},$$

$$\sqrt[6]{128} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^6} = 2\sqrt[6]{2}$$

②

$$\sqrt[3]{a^5 b^3} = \sqrt[3]{a^2 a^3 b^3} = \sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{a^3} \sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{a^2} \cdot a \cdot b = a \cdot b \cdot \sqrt[3]{a^2} = a \cdot b \cdot a^{2/3},$$

$$\sqrt{a^2 b^3 c^4} = \sqrt{a^2} \sqrt{b^3} \sqrt{c^4} = |a| \sqrt{b^2 b} c^2 = |a| \cdot |b| \sqrt{b} \cdot c^2,$$

$$\sqrt[3]{a^{10} b^4 c^7} = a^{10/3} b^{4/3} c^{7/3} = a^{3+1/3} b^{1+1/3} c^{2+1/3} = a^3 a^{1/3} b b^{1/3} c^2 c^{1/3} = a^3 b c^2 \sqrt[3]{abc},$$

$$\sqrt[4]{a^3 b^4 c^5} = a^{3/4} b^{4/4} c^{5/4} = a^{3/4} b c c^{1/4} = b c \sqrt[4]{a^3} \sqrt[4]{c} = b c \sqrt[4]{a^3 c},$$

$$\sqrt[5]{32 a^7 b^{12}} = \sqrt[5]{32} a^{7/5} b^{12/5} = 2 a a^{2/5} b^2 b^{2/5} = 2 a b^2 \sqrt[5]{a^2 b^2},$$

$$\sqrt[6]{a^{6x} b^{12y} c^{19z}} = a^{6x/6} b^{12y/6} c^{19z/6} = a^x b^{2y} c^{18z/6+z/6} = a^x b^{2y} c^{3z} c^{z/6} = a^x b^{2y} c^{3z} \sqrt[6]{c^z}$$

③

$$\sqrt[n]{a^{n+2}} = \sqrt[n]{a^n a^2} = a \sqrt[n]{a^2},$$

$$\sqrt[n]{a^{2n}} = \sqrt[n]{(a^2)^n} = a^2,$$

$$\sqrt[n]{a^{2n+1}} = \sqrt[n]{a(a^2)^n} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{(a^2)^n} = a^{1/n} \sqrt[n]{a^2},$$

$$\sqrt[n]{a^{4n+2}} = \sqrt[n]{a^2 (a^4)^n} = a^{2/n} \sqrt[n]{a^4},$$

$$\sqrt[n]{a^{n^2}} = \sqrt[n]{a^{n \cdot n}} = \sqrt[n]{(a^n)^n} = a^n,$$

$$= (a^{n^2})^{1/n} = a^{\frac{n^2}{n}} = a^n,$$

$$\sqrt[n]{a^{n^2-n}} = \sqrt[n]{\frac{a^{n^2}}{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n^2}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{a^n}{a} = a^{n-1},$$

$$= a^{\frac{n^2-n}{n}} = a^{n-1},$$

4

$$\begin{aligned}
& \sqrt[n+1]{a^{n^2+2n+1}} = \sqrt[n+1]{a^{(n+1)^2}} = a^{\frac{(n+1)^2}{n+1}} = a^{n+1} \\
& \sqrt[3]{\frac{a^4}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{a\sqrt[3]{a}}{b}, \\
& \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \\
& \sqrt[5]{\frac{a^{10}}{b^5}} = \frac{\sqrt[5]{a^{10}}}{\sqrt[5]{b^5}} = \frac{a^2}{b}, \\
& \sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3c^6}} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{b^3}\sqrt[3]{c^6}} = \frac{a}{bc^2}, \\
& \sqrt[5]{\frac{3^5a^{10}}{b^5}} = \frac{\sqrt[5]{3^5a^{10}}}{\sqrt[5]{b^5}} = \frac{3a^2}{b}, \\
& \sqrt[5]{\frac{a^{12}c^6}{b^7}} = \sqrt[5]{a^{12}c^6b^{-7}} = a^{12/5}b^{-7/5}c^{6/5} \\
& = a^{2+2/5}b^{-1-2/5}c^{1+1/5} = a^2a^{2/5}b^{-1}b^{-2/5}cc^{1/5} = \frac{a^2c\sqrt[5]{a^2c}}{b\sqrt[5]{b^2}}, \\
& \sqrt[3]{\frac{a^{12}c^{11}}{c^2}} = \sqrt[3]{a^{12}c^{11-2}} = a^{12/3}c^{9/3} = a^4c^3
\end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{16a-24} = \sqrt[3]{8(2a-3)} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2a-3} = 2\sqrt[3]{2a-3}, \\
& \sqrt[3]{27a+54} = \sqrt[3]{27(a+2)} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{a+2} = 3\sqrt[3]{a+2}, \\
& \sqrt{a^2+4}, \\
& \sqrt[4]{a^2+2ab+b^2} = \sqrt[4]{(a+b)^2} = (a+b)^{2/4} = (a+b)^{1/2} = \sqrt{a+b}
\end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\sqrt[3]{25a^4}} = \sqrt[3]{\sqrt{25a^4}} = \sqrt[3]{5a^2}, \\
& \sqrt{a\sqrt[5]{a^3}} = (aa^{3/5})^{1/2} = (a^{1+3/5})^{1/2} = (a^{8/5})^{1/2} = a^{8/10} = a^{4/5} = \sqrt[5]{a^4}, \\
& \sqrt[3]{\sqrt{(a+b)^9}} = \sqrt{\sqrt[3]{(a+b)^9}} = \sqrt{(a+b)^3} = (a+b)^{3/2} \\
& = (a+b)^{1+1/2} = (a+b)\sqrt{a+b}, \\
& \sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{30}a^{15}b^{20}}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{30}}\sqrt[3]{a^{15}}\sqrt[3]{b^{20}}} = \sqrt[5]{2^{10}}\sqrt[5]{a^5}\sqrt[3]{\sqrt[5]{b^{20}}} = 2^2a\sqrt[3]{b^4} = 4ab\sqrt[3]{b}, \\
& \sqrt{\sqrt[4]{2^8a^{16}b^{24}}} = \left(\left(2^8a^{16}b^{24}\right)^{1/4}\right)^{1/2} = \left(2^8a^{16}b^{24}\right)^{1/8} = 2a^2b^3
\end{aligned}$$

7

$$\sqrt[4]{16^5} = (\sqrt[4]{16})^5 = 2^5 = 32,$$

$$\sqrt[3]{27^4} = 27^{4/3} = 27^{1+1/3} = 27\sqrt[3]{27} = 27 \cdot 3 = 81,$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{16}{81}\right)^q} = \left(\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}}\right)^q = \left(\frac{2}{3}\right)^q,$$

$$\sqrt[3]{(216b^3)^2} = \left(\sqrt[3]{2^3 3^3 b^3}\right)^2 = (6b)^2 = 36b^2,$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{125}{64}\right)^r} = \left(\sqrt[3]{\frac{125}{64}}\right)^r = \left(\frac{5}{4}\right)^r$$

8

$$\sqrt{\sqrt[3]{256a^4x^8}} = \left(2^8a^4x^8\right)^{1/6} = 2^{8/6}a^{4/6}x^{8/6}$$

$$= 2^{4/3}a^{2/3}x^{4/3} = 22^{1/3}a^{2/3}xx^{1/3} = 2x\sqrt[3]{2a^2x},$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^2 + 2ab + b^2}} = \sqrt[6]{(a+b)^2} = (a+b)^{2/6} = (a+b)^{1/3} = \sqrt[3]{a+b},$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x^{24}y^{36}z^{48}}}} = \left(x^{24}y^{36}z^{48}\right)^{1/24} = x^{24/24}y^{36/24}z^{48/24} = xy^{3/2}z^2 = xyz^2\sqrt{y}$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 10 - Uitwerking

- ① $\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 3\sqrt{a}$
 $= \sqrt{a}(1 - 2 + 3) = 2\sqrt{a},$
- ② $\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{a^4}$
 $= \sqrt[3]{a} + 2a\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a}(1 + 2a)$
 $= (1 + 2a)\sqrt[3]{a},$
- ③ $\sqrt{9a} - \sqrt{4a} + \sqrt{a}$
 $= \sqrt{9}\sqrt{a} - \sqrt{4}\sqrt{a} + \sqrt{a} = 3\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + \sqrt{a}$
 $= (3 - 2 + 1)\sqrt{a} = 2\sqrt{a},$
- ④ $\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$
 $= \sqrt[3]{2^4} + 3\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - 2\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 2\sqrt[3]{2} + 9\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2}$
 $= (2 + 9 - 10)\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2},$
- ⑤ $\sqrt[6n]{ab} - \sqrt[30n]{a^5b^5}$
 $= a^{\frac{1}{6n}} b^{\frac{1}{6n}} - (a^5)^{\frac{1}{30n}} (b^5)^{\frac{1}{30n}} = a^{\frac{1}{6n}} b^{\frac{1}{6n}} - a^{\frac{1}{6n}} b^{\frac{1}{6n}} = 0,$
- ⑥ $\sqrt[3]{56} - \sqrt[3]{189} + 3\sqrt[3]{448}$
 $= \sqrt[3]{7 \cdot 2^3} - \sqrt[3]{7 \cdot 3^3} + 3\sqrt[3]{7 \cdot 2^6} = 2\sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{7} + 12\sqrt[3]{7} = 11\sqrt[3]{7},$
- ⑦ $\sqrt{1100} + \sqrt{44} - \sqrt{99}$
 $= \sqrt{11 \cdot 10^2} + \sqrt{11 \cdot 2^2} - \sqrt{11 \cdot 3^2} = \sqrt{11}(10 + 2 - 3) = 9\sqrt{11},$
- ⑧ $\sqrt[3]{24a^4} + \sqrt[3]{3a^4b^3} - \sqrt[3]{81ab^6}$
 $= \sqrt[3]{3 \cdot 2^3a^4} + \sqrt[3]{3a^4b^3} - \sqrt[3]{3^4ab^6} = 2a\sqrt[3]{3a} + ab\sqrt[3]{3a} - 3b^2\sqrt[3]{3a}$
 $= (2a + ab - 3b^2)\sqrt[3]{3a},$
- ⑨ $2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125} - 4\sqrt{20}$
 $= 2\sqrt{5 \cdot 3^2} - 3\sqrt{5 \cdot 4^2} + \sqrt{5 \cdot 5^2} - 4\sqrt{5 \cdot 2^2}$
 $= 6\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 8\sqrt{5} = (6 - 12 + 5 - 8)\sqrt{5} = -9\sqrt{5},$
- ⑩ $2\sqrt{24} \cdot 3\sqrt[4]{18} \cdot 4\sqrt[6]{24}$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{2 \cdot 3^2} \cdot \sqrt[6]{2^3 \cdot 3} \\
&= 24 \cdot 2^{\frac{3}{2}} 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} 3^{\frac{2}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{6}} 3^{\frac{1}{6}} = 24 \cdot 2^{\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{6}} \\
&= 24 \cdot 2^{\frac{9}{4}} \cdot 3^{\frac{7}{6}} = 24 \cdot 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{6}} \\
&= 288 \sqrt[4]{2} \sqrt[6]{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\textcircled{11} \quad \sqrt[5]{54} \cdot 3 \sqrt[5]{16} \cdot (-2 \sqrt[5]{9}) \\
&= 3 \cdot (-2) \cdot \sqrt[5]{2 \cdot 3^3} \cdot \sqrt[5]{2^4} \cdot \sqrt[5]{3^2} \\
&= -6 \cdot \sqrt[5]{2 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^2} = -6 \cdot \sqrt[5]{2^5 \cdot 3^5} = -6 \cdot 2 \cdot 3 = -36
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\textcircled{12} \quad \sqrt{343} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[5]{49} \\
&= \sqrt{7^3} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[5]{7^2} = 7^{\frac{3}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{2}{5}} \\
&= 7^{\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5}} = 7^{\frac{43}{20}} = 7^2 \cdot 7^{\frac{3}{20}} = 49 \sqrt[20]{7^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\textcircled{13} \quad 3a\sqrt{2abc} \cdot 2ab \cdot \sqrt[6]{ab^5} \cdot 5b \cdot \sqrt[4]{8a^3bc^2} \\
&= 3a \cdot 2ab \cdot 5b \cdot 2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{5}{6}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{4}} c^{\frac{2}{4}} \\
&= 30a^2 b^2 2^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4}} b^{\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4}} c^{\frac{1}{2} + \frac{2}{4}} \\
&= 30a^2 b^2 2^{\frac{5}{4}} a^{\frac{17}{12}} b^{\frac{19}{12}} c = 30a^2 b^2 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} a \cdot a^{\frac{5}{12}} b \cdot b^{\frac{7}{12}} c \\
&= 60 \sqrt[4]{2} a^3 b^3 c \sqrt[12]{a^5 b^7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\textcircled{14} \quad \sqrt{5}(\sqrt{2} - \sqrt{5} + 2\sqrt{10}) \\
&= \sqrt{5}\sqrt{2} - \sqrt{5}\sqrt{5} + 2\sqrt{5}\sqrt{10} \\
&= \sqrt{10} - \sqrt{25} + 2\sqrt{50} = \sqrt{10} - 5 + 2\sqrt{2 \cdot 5^2} = \sqrt{10} - 5 + 10\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\textcircled{15} \quad (\sqrt{14} + \sqrt{21} + 2\sqrt{6}) \cdot \sqrt{42} \\
&= \sqrt{14}\sqrt{42} + \sqrt{21}\sqrt{42} + 2\sqrt{6}\sqrt{42} = \sqrt{14 \cdot 42} + \sqrt{21 \cdot 42} + 2\sqrt{6 \cdot 42} \\
&= \sqrt{2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} + \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} + 2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} \\
&= 2 \cdot 7\sqrt{3} + 3 \cdot 7\sqrt{2} + 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{7} = 14\sqrt{3} + 21\sqrt{2} + 12\sqrt{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\textcircled{16} \quad (6\sqrt[4]{216} + 6\sqrt{6} - 6\sqrt[4]{6} + 6) \cdot (-\sqrt[4]{216}) \\
&= (6\sqrt[4]{6^3} + 6\sqrt{6} - 6\sqrt[4]{6} + 6) \cdot (-\sqrt[4]{6^3}) \\
&= -6 \cdot (6^{\frac{3}{4}} + 6^{\frac{1}{2}} - 6^{\frac{1}{4}} + 1) \cdot 6^{\frac{3}{4}} \\
&= -6 \cdot (6^{\frac{6}{4}} + 6^{\frac{5}{4}} - 6^{\frac{4}{4}} + 6^{\frac{3}{4}}) \\
&= -6 \cdot (6 \cdot 6^{\frac{1}{2}} + 6 \cdot 6^{\frac{1}{4}} - 6 + 6^{\frac{3}{4}}) \\
&= -6 \cdot (6\sqrt{6} + 6\sqrt[4]{6} - 6 + \sqrt[4]{6^3}) \\
&= -36\sqrt{6} - 36\sqrt[4]{6} + 36 - 6\sqrt[4]{6^3}
\end{aligned}$$

$$\textcircled{17} \quad (\sqrt{5} + 2\sqrt[3]{6}) \cdot (\sqrt{5} - 2\sqrt[3]{6})$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{5}^2 - (2\sqrt[3]{6})^2 = 5 - 4\sqrt[3]{6^2} = 5 - 4\sqrt[3]{36} \\
 \textcircled{18} \quad &(\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^2 \\
 &= \sqrt{5}^2 - 4\sqrt{5}\sqrt{6} + 4\sqrt{6}^2 \\
 &= 5 - 4\sqrt{30} + 24 = 29 - 4\sqrt{30}
 \end{aligned}$$

Theorie

OK

Opl

Veeltermen - Opgaven

Oefening 1 - Opgave



Beschouw de volgende veeltermen:

$$A = x^2 + 3x + 5, \quad B = x^2 + 5x + 3.$$

Bereken:

$$\begin{aligned} &A + B, \quad A - B, \\ &A^2, \quad A \cdot B, \quad B^2, \\ &A^2 - 2AB + B^2, \quad (A + B)^2, \\ &A^3, \quad B^3, \quad A \cdot B^2 \end{aligned}$$

Theorie

Opl

Oefening 2 - Opgave



Beschouw de volgende veeltermen:

$$A = 5x^3 - 3x^2 + 5x - 7, \quad B = 3x^2 + 5x + 3.$$

Bereken:

$$\begin{aligned} &A + B, \quad A - B, \\ &A^2, \quad A \cdot B, \quad B^2, \\ &A^2 - B^3 \end{aligned}$$

Theorie

Opl

Oefening 3 - Opgave



Deel de veelterm D door d :

- ① $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = x - 2;$
- ② $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = x + 4;$
- ③ $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = x + 1;$
- ④ $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = -x - 3;$
- ⑤ $D = x^3 + 3x^2 + 5x - 7, \quad d = x - 2;$
- ⑥ $D = x^3 + 3x^2 + 5x - 7, \quad d = x + 1;$
- ⑦ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = x - 2;$
- ⑧ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = x + \frac{1}{2};$
- ⑨ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = 2x - 1;$
- ⑩ $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x - 1;$
- ⑪ $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x + 1;$
- ⑫ $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x - \frac{1}{2};$
- ⑬ $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x + \frac{1}{2};$
- ⑭ $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = 2x + 3;$
- ⑮ $D = x^3 + 2x + 1, \quad d = x - 1;$
- ⑯ $D = x^3 + 2x + 1, \quad d = 1 + x;$
- ⑰ $D = x - x^3 - 7 + 5x^2, \quad d = 1 + x;$
- ⑱ $D = 1 - x^4 + 5x^2, \quad d = 2 - x;$
- ⑲ $D = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \quad d = x - 1;$
- ⑳ $D = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \quad d = x + 1;$

Theorie

Opl

Oefening 4 - Opgave



Deel de veelterm D door d :

- ① $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = x^2 - x + 2;$
- ② $D = 3x^2 + 2x + 1, \quad d = x^2 - x + 2;$
- ③ $D = 4x^2 - 4x + 8, \quad d = 2x^2 - 3x + 4;$
- ④ $D = -3x^2 - 2x + 9, \quad d = 3x^2 + 1;$
- ⑤ $D = x^2 + 3x + 5, \quad d = x^2 - 2;$
- ⑥ $D = x^2 + 5, \quad d = x^2 + x + 2;$
- ⑦ $D = x^2 + 6x, \quad d = x^2 + 2x;$
- ⑧ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = x^2 - 2x + 8;$
- ⑨ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = 2x^2 - 3x + 1;$
- ⑩ $D = x^3 - 2x + 1, \quad d = x^2 - 3x;$
- ⑪ $D = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1, \quad d = x^2 - 2x + 5;$
- ⑫ $D = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1, \quad d = x^2 - 2;$
- ⑬ $D = x^4 - 2x^3 - 2x + 1, \quad d = x^3 - 2x + 1;$
- ⑭ $D = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1, \quad d = x^4 - 5$
- ⑮ $D = x^4 - 3x^3 + 5x^2, \quad d = x^4 + x^3 - 5$

Theorie

Opl

Oefening 5 - Opgave



Ontbind in factoren:

- ① $ax + 3x,$
- ② $x^3 - 4x^2,$
- ③ $x^2y - xy^2,$
- ④ $18x^5 - 12x^3,$
- ⑤ $16a^2x^2 - 4ax^2,$
- ⑥ $15x^3 - 10x^2 + 5x,$
- ⑦ $14a^3b^2 + 35a^2b^3 - 28a^4b,$
- ⑧ $(a - b)x + (a - b)y,$
- ⑨ $(x - 5)x + (5 - x)y,$
- ⑩ $2a(-x - y) - 7(x + y)$

Theorie

Opl

Oefening 6 - Opgave



Ontbind in factoren:

- ① $x^2 - 25,$
- ② $4a^2 - 1,$
- ③ $49x^2 - 9y^2,$
- ④ $x^3y - xy^3,$
- ⑤ $8a^2 - 18,$
- ⑥ $a^4 - 1,$
- ⑦ $x^4 - 81,$
- ⑧ $2x^5 - 32x,$
- ⑨ $(x - y)^2 - 9,$
- ⑩ $x^2 - (y + 2)^2,$

Theorie

Opl

Oefening 7 - Opgave



Ontbind in factoren:

- ➊ $x^3 - 8,$
- ➋ $a^3 + 1,$
- ➌ $y^3 - 27,$
- ➍ $27x^3 + 8,$
- ➎ $27 + x^6,$
- ➏ $27x^3 + \frac{1}{27},$
- ➐ $x^4 - x,$
- ➑ $a^6 - b^6,$
- ➒ $64 - x^6,$
- ➓ $x^7 - x$

Theorie

Opl

Oefening 8 - Opgave



Ontbind in factoren:

- ➊ $9x^2 + 24x + 16,$
- ➋ $x^2 - 4x + 4,$
- ➌ $4x^2 + 1 - 4x,$
- ➍ $1 + 4x^2 + 4x^4,$
- ➎ $x^3 + 2x^2 + x,$
- ➏ $10x - 25 - x^2,$
- ➐ $1 - 4x^2 + 4x^4,$
- ➑ $x^6 + 2x^3 + 1,$
- ➒ $x^7 - 2x^4 + x,$
- ➓ $x^8 - 8x^4 + 16,$
- ➑ $2a^6 - 4a^3b^2 + 2b^4,$
- ➒ $2a^6 - 64a^3 + 512$

Theorie

Opl

Oefening 9 - Opgave



Ontbind in factoren:

- ❶ $a^3 + 6a^2 + 12a + 8,$
- ❷ $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3,$
- ❸ $2a^3b - 6a^2bc + 6abc^2 - 2bc^3,$
- ❹ $x^6 - x^5 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{27}x^3,$
- ❺ $-64b^3 - 12b + 1 + 48b^2$

Theorie

Opl

Oefening 10 - Opgave



Ontbind in factoren:

- ① $xy + ax + 2y + 2a,$
- ② $x^2 - 3xy - 2ax + 6ay,$
- ③ $ax - x - a + 1,$
- ④ $6x^2 - 6y + 4x - 9xy,$
- ⑤ $a^2bx - ab^2 - ax^2 + bx$
- ⑥ $x^2 - 4 + xy + 2y,$
- ⑦ $a^2 - 2a - 2b - b^2,$
- ⑧ $x + y + x^3 + y^3,$
- ⑨ $x^3 - y^3 + x^2 - y^2,$
- ⑩ $x^5 - x^3y^2 + x^2y^3 - y^5$
- ⑪ $a^3 - 2a^2 - b^3 + 2b^2,$
- ⑫ $x^2 + 6x + 9 - y^2,$
- ⑬ $4x^2 - 25 - 4xy + y^2,$
- ⑭ $a^2 + b^2 - 2ab - c^2,$
- ⑮ $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 8,$
- ⑯ $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 8x^3,$
- ⑰ $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$

Theorie

Opl

Veeltermen - Oplossing

Oefening 1 - Oplossing

$$\begin{aligned}A + B &= 2x^2 + 8x + 8, \\A - B &= -2x + 2, \\A^2 &= x^4 + 6x^3 + 19x^2 + 30x + 25 \\A \cdot B &= x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 34x + 15, \\B^2 &= x^4 + 10x^3 + 31x^2 + 30x + 9, \\A^2 - 2AB + B^2 &= 4x^2 - 8x + 4, \\(A + B)^2 &= 4x^4 + 32x^3 + 96x^2 + 128x + 64, \\A^3 &= x^6 + 9x^5 + 42x^4 + 117x^3 + 210x^2 + 225x + 125, \\B^3 &= x^6 + 15x^5 + 84x^4 + 215x^3 + 252x^2 + 135x + 27, \\A \cdot B^2 &= x^6 + 13x^5 + 66x^4 + 173x^3 + 254x^2 + 177x + 45.\end{aligned}$$

Theorie

OK

Detail

Oefening 2 - Oplossing

$$A + B = 5x^3 + 10x - 4,$$

$$A - B = 5x^3 - 6x^2 - 10,$$

$$A^2 = 25x^6 - 30x^5 + 59x^4 - 100x^3 + 67x^2 - 70x + 49,$$

$$A \cdot B = 15x^5 + 16x^4 + 15x^3 - 5x^2 - 20x - 21,$$

$$B^2 = 9x^4 + 30x^3 + 43x^2 + 30x + 9,$$

$$A^2 - B^3 = -2x^6 - 165x^5 - 247x^4 - 495x^3 - 239x^2 - 205x + 22.$$

Theorie

OK

Detail

Oefening 3 - Oplossing

- ① $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = x - 2;$
 $Q = x + 4, \quad R = 9;$
- ② $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = x + 4;$
 $Q = x - 2, \quad R = 9;$
- ③ $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = x + 1;$
 $Q = x + 1, \quad R = 0;$
- ④ $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = -x - 3;$
 $Q = -x + 1, \quad R = 4;$
- ⑤ $D = x^3 + 3x^2 + 5x - 7, \quad d = x - 2;$
 $Q = x^2 + 5x + 15, \quad R = 23;$
- ⑥ $D = x^3 + 3x^2 + 5x - 7, \quad d = x + 1;$
 $Q = x^2 + 2x + 3, \quad R = -10;$
- ⑦ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = x - 2;$
 $Q = x^2 + 6x + 10, \quad R = 21;$
- ⑧ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = x + \frac{1}{2};$
 $Q = x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{15}{4}, \quad R = \frac{23}{8};$
- ⑨ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = 2x - 1;$
 $Q = \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{1}{8}, \quad R = \frac{9}{8};$
- ⑩ $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x - 1;$
 $Q = x^3 + 2x^2 + 3x + 4, \quad R = 5;$
- ⑪ $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x + 1;$
 $Q = x^3 + x, \quad R = 1;$

- ⑫ $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x - \frac{1}{2};$
 $Q = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{15}{8}, \quad R = \frac{31}{16};$
- ⑬ $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x + \frac{1}{2};$
 $Q = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{8}, \quad R = \frac{11}{16};$
- ⑭ $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = 2x + 3;$
 $Q = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{8}x - \frac{13}{16}, \quad R = \frac{55}{16};$
- ⑮ $D = x^3 + 2x + 1, \quad d = x - 1;$
 $Q = x^2 + x + 3, \quad R = 4;$
- ⑯ $D = x^3 + 2x + 1, \quad d = 1 + x;$
 $Q = x^2 - x + 3, \quad R = -2;$
- ⑰ $D = x - x^3 - 7 + 5x^2, \quad d = 1 + x;$
 $Q = -x^2 + 6x - 5, \quad R = -2;$
- ⑱ $D = 1 - x^4 + 5x^2, \quad d = 2 - x;$
 $Q = x^3 + 2x^2 - x - 2, \quad R = 5;$
- ⑲ $D = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \quad d = x - 1;$
 $Q = x^3 + 5x^2 + 11x + 15, \quad R = 16;$
- ⑳ $D = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \quad d = x + 1;$
 $Q = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad R = 0;$

Theorie

OK

Detail

Oefening 4 - Oplossing

- ➊ $Q = 1; \quad R = 3x - 1;$
- ➋ $Q = 3; \quad R = 5x - 5;$
- ➌ $Q = 2; \quad R = 2x;$
- ➍ $Q = -1; \quad R = -2x + 10;$
- ➎ $Q = 1; \quad R = 3x + 7;$
- ➏ $Q = 1; \quad R = -x + 3;$
- ➐ $Q = 1; \quad R = 4x;$
- ➑ $Q = x + 6; \quad R = 2x - 47;$
- ➒ $Q = \frac{1}{2}x + \frac{11}{4}; \quad R = \frac{23}{4}x - \frac{7}{4};$
- ➓ $Q = x + 3; \quad R = 7x + 1;$
- ➑ $Q = x^2 - 2; \quad R = -6x + 11;$
- ➒ $Q = x^2 - 2x + 5; \quad R = -6x + 11;$
- ➓ $Q = x - 2; \quad R = 2x^2 - 7x + 3;$
- ➑ $Q = 1; \quad R = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 6;$
- ➒ $Q = 1; \quad R = -4x^3 + 5x^2 + 5;$

Theorie

OK

Detail

Oefening 5 - Oplossing

- ➊ $ax + 3x = (a + 3)x$
- ➋ $x^3 - 4x^2 = (x - 4)x^2$
- ➌ $x^2y - xy^2 = (x - y)xy$
- ➍ $18x^5 - 12x^3 = 6x^3(3x^2 - 2)$
- ➎ $16a^2x^2 - 4ax^2 = 4ax^2(4a - 1)$
- ➏ $15x^3 - 10x^2 + 5x = 5x(3x^2 - 2x + 1)$
- ➐ $14a^3b^2 + 35a^2b^3 - 28a^4b = 7a^2b(4a^2 + 2ab + 5b^2)$
- ➑ $(a - b)x + (a - b)y = (a - b)(x + y)$
- ➒ $(x - 5)x + (5 - x)y = (x - 5)(x - y)$
- ➓ $2a(-x - y) - 7(x + y) = -(2a + 7)(x + y)$

Theorie

OK

Detail

Oefening 6 - Oplossing

- ➊ $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$
- ➋ $4a^2 - 1 = (2a - 1)(2a + 1)$
- ➌ $49x^2 - 9y^2 = (7x - 3y)(7x + 3y)$
- ➍ $x^3y - xy^3 = xy(x - y)(x + y)$
- ➎ $8a^2 - 18 = 2(2a - 3)(2a + 3)$
- ➏ $a^4 - 1 = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$
- ➐ $x^4 - 81 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$
- ➑ $2x^5 - 32x = 2x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$
- ➒ $(x - y)^2 - 9 = (x - y - 3)(x - y + 3)$
- ➓ $x^2 - (y + 2)^2 = (x - y - 2)(x + y + 2)$

Theorie

OK

Detail

Oefening 7 - Oplossing

- ➊ $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
- ➋ $a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$
- ➌ $y^3 - 27 = (y - 3)(y^2 + 3y + 9)$
- ➍ $27x^3 + 8 = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$
- ➎ $27 + x^6 = (3 + x^2)(9 - 3x^2 + x^4)$
- ➏ $27x^3 + \frac{1}{27} = (3x + \frac{1}{3})(9x^2 - x + \frac{1}{9})$
- ➐ $x^4 - x = x(x - 1)(x^2 + x + 1)$
- ➑ $a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$
- ➒ $64 - x^6 = (2 - x)(4 + 2x + x^2)(2 + x)(4 - 2x + x^2)$
- ➓ $x^7 - x = x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

Theorie

OK

Detail

Oefening 8 - Oplossing

- ➊ $9x^2 + 24x + 16 = (3x + 4)^2$
- ➋ $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$
- ➌ $4x^2 + 1 - 4x = (2x - 1)^2$
- ➍ $1 + 4x^2 + 4x^4 = (1 + 2x^2)^2$
- ➎ $x^3 + 2x^2 + x = x(x + 1)^2$
- ➏ $10x - 25 - x^2 = -(x - 5)^2$
- ➐ $1 - 4x^2 + 4x^4 = (1 - \sqrt{2}x)^2(1 + \sqrt{2}x)^2$
- ➑ $x^6 + 2x^3 + 1 = (x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2$
- ➒ $x^7 - 2x^4 + x = x(x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2$
- ➓ $x^8 - 8x^4 + 16 = (x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2(x^2 + 2)^2$
- ➑ $2a^6 - 4a^3b^2 + 2b^4 = 2(a^3 - b^2)^2$
- ➒ $2a^6 - 32a^3 + 128 = 2(a - 2)^2(a^2 + 2a + 4)^2$

Theorie

OK

Detail

Oefening 9 - Oplossing

- ① $a^3 + 6a^2 + 12a + 8 = (a + 2)^3$
- ② $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3 = (x - 3y)^3$
- ③ $2a^3b - 6a^2bc + 6abc^2 - 2bc^3 = 2b(a - c)^3$
- ④ $x^6 - x^5 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{27}x^3 = \frac{1}{27}x^3(3x - 1)^3$
- ⑤ $-64b^3 - 12b + 1 + 48b^2 = (1 - 3b)^3$

Theorie

OK

Detail

Oefening 10 - Oplossing

- 1 $xy + ax + 2y + 2a = (x + 2)(y + a)$
- 2 $x^2 - 3xy - 2ax + 6ay = (x - 2a)(x - 3y)$
- 3 $ax - x - a + 1 = (x - 1)(a - 1)$
- 4 $6x^2 - 6y + 4x - 9xy = (2 + 3x)(2x - 3y)$
- 5 $a^2bx - ab^2 - ax^2 + bx = (ab - x)(ax - b)$
- 6 $x^2 - 4 + xy + 2y = (x + 2)(x + y - 2)$
- 7 $a^2 - 2a - 2b - b^2 = (a + b)(a - b - 2)$
- 8 $x + y + x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2 + 1)$
- 9 $x^3 - y^3 + x^2 - y^2 = (x - y)(x^2 + xy + y^2 + x + y)$
- 10 $x^5 - x^3y^2 + x^2y^3 - y^5 = (x + y)^2(x - y)(x^2 - xy + y^2)$
- 11 $a^3 - 2a^2 - b^3 + 2b^2 = (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 2a - 2b)$
- 12 $x^2 + 6x + 9 - y^2 = (x - y + 3)(x + y + 3)$
- 13 $4x^2 - 25 - 4xy + y^2 = (2x - y - 5)(2x - y + 5)$
- 14 $a^2 + b^2 - 2ab - c^2 = (a - b - c)(a - b + c)$
- 15 $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 8 = (x + y - 2)(x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 4)$
- 16 $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 8x^3 = -(x - 1)(7x^2 + 4x + 1)$
- 17 $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

Theorie

OK

Detail

Veeltermen - Uitwerking

Oefening 1 - Uitwerking

$$\begin{aligned}A + B &= (x^2 + 3x + 5) + (x^2 + 5x + 3) \\&= (1 + 1)x^2 + (3 + 5)x + (5 + 3) \\&= 2x^2 + 8x + 8, \\A - B &= (x^2 + 3x + 5) - (x^2 + 5x + 3) \\&= (x^2 + 3x + 5) + (-x^2 - 5x - 3) \\&= (1 - 1)x^2 + (3 - 5)x + (5 - 3) \\&= 0x^2 + (-2)x + 2 = -2x + 2, \\A^2 &= (x^2 + 3x + 5)^2 \\&= (x^2 + 3x + 5) \cdot (x^2 + 3x + 5) \\&= x^2 \cdot x^2 + 3x \cdot x^2 + 5 \cdot x^2 \\&\quad + x^2 \cdot 3x + 3x \cdot 3x + 5 \cdot 3x \\&\quad + x^2 \cdot 5 + 3x \cdot 5 + 5 \cdot 5 \\&= x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x^3 + 9x^2 + 15x + 5x^2 + 15x + 25 \\&= x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 30x + 25 \\A \cdot B &= (x^2 + 3x + 5) \cdot (x^2 + 5x + 3) \\&= x^2 \cdot x^2 + 3x \cdot x^2 + 5 \cdot x^2 \\&\quad + x^2 \cdot 5x + 3x \cdot 5x + 5 \cdot 5x \\&\quad + x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3 + 5 \cdot 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x^3 + 15x^2 + 25x + 3x^2 + 9x + 15 \\
&= x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 34x + 15, \\
B^2 &= (x^2 + 5x + 3) \cdot (x^2 + 5x + 3) \\
&= x^2 \cdot x^2 + 5x \cdot x^2 + 3 \cdot x^2 \\
&\quad + x^2 \cdot 5x + 5x \cdot 5x + 3 \cdot 5x \\
&\quad + x^2 \cdot 3 + 5x \cdot 3 + 3 \cdot 3 \\
&= x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x^3 + 25x^2 + 15x + 3x^2 + 15x + 9 \\
&= x^4 + 10x^3 + 31x^2 + 30x + 9, \\
A^2 - 2AB + B^2 &= (x^4 + 6x^3 + 19x^2 + 30x + 25) \\
&\quad - 2(x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 34x + 15) \\
&\quad + (x^4 + 10x^3 + 31x^2 + 30x + 9) \\
&= (1 - 2 + 1)x^4 + (6 - 16 + 10)x^3 + (19 - 46 + 31)x^2 + (30 - 68 + 30)x + (25 - 30 + 9) \\
&= 4x^2 - 8x + 4, \\
(A + B)^2 &= (2x^2 + 8x + 8)^2 \\
&= 4x^4 + 16x^3 + 16x^2 + 16x^3 + 64x^2 + 64x + 16x^2 + 64x + 64 \\
&= 4x^4 + 32x^3 + 96x^2 + 128x + 64, \\
A^3 &= A \cdot A^2 \\
&= (x^2 + 3x + 5) \cdot (x^4 + 6x^3 + 19x^2 + 30x + 25) \\
&= x^6 + 9x^5 + 42x^4 + 117x^3 + 210x^2 + 225x + 125, \\
B^3 &= B \cdot B^2 \\
&= (x^2 + 5x + 3) \cdot (x^4 + 10x^3 + 31x^2 + 30x + 9) \\
&= x^6 + 15x^5 + 84x^4 + 215x^3 + 252x^2 + 135x + 27, \\
A \cdot B^2 &= (x^2 + 3x + 5) \cdot (x^4 + 10x^3 + 31x^2 + 30x + 9) \\
&= x^6 + 13x^5 + 66x^4 + 173x^3 + 254x^2 + 177x + 45.
\end{aligned}$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 2 - Uitwerking

$$\begin{aligned}A + B &= (5x^3 - 3x^2 + 5x - 7) + (3x^2 + 5x + 3) \\&= (5 + 0)x^3 + (-3 + 3)x^2 + (5 + 5)x + (-7 + 3) \\&= 5x^3 + 0x^2 + 10x + (-4) \\&= 5x^3 + 10x - 4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A - B &= (5x^3 - 3x^2 + 5x - 7) - (3x^2 + 5x + 3) \\&= (5x^3 - 3x^2 + 5x - 7) + (-3x^2 - 5x - 3) \\&= (5 - 0)x^3 + (-3 - 3)x^2 + (5 - 5)x + (-7 - 3) \\&= 5x^3 + (-6)x^2 + 0x + (-10) \\&= 5x^3 - 6x^2 - 10,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^2 &= (5x^3 - 3x^2 + 5x - 7)^2 \\&= (5x^3 - 3x^2 + 5x - 7) \cdot (5x^3 - 3x^2 + 5x - 7) \\&= 25x^6 - 15x^5 + 25x^4 - 35x^3 \\&\quad - 15x^5 + 9x^4 - 15x^3 + 21x^2 \\&\quad + 25x^4 - 15x^3 + 25x^2 - 35x \\&\quad - 35x^3 + 21x^2 - 35x + 49 \\&= 25x^6 - 30x^5 + 59x^4 - 100x^3 + 67x^2 - 70x + 49,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A \cdot B &= (5x^3 - 3x^2 + 5x - 7) \cdot (3x^2 + 5x + 3) \\&= 15x^5 - 9x^4 + 15x^3 - 21x^2 \\&\quad + 25x^4 - 15x^3 + 25x^2 - 35x \\&\quad + 15x^3 - 9x^2 + 15x - 21 \\&= 15x^5 + 16x^4 + 15x^3 - 5x^2 - 20x - 21,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B^2 &= (3x^2 + 5x + 3)^2 \\&= (3x^2 + 5x + 3) \cdot (3x^2 + 5x + 3) \\&= 9x^4 + 15x^3 + 9x^2 + 15x^3 + 25x^2 + 15x + 9x^2 + 15x + 9 \\&= 9x^4 + 30x^3 + 24x^2 + 30x + 9,\end{aligned}$$

$$A^2 - B^3 = (5x^3 - 3x^2 + 5x - 7)^2 - (3x^2 + 5x + 3)^3$$

$$\begin{aligned}
&= (25x^6 - 30x^5 + 59x^4 - 100x^3 + 67x^2 - 70x + 49) \\
&\quad - (27x^6 + 135x^5 + 306x^4 + 395x^3 + 306x^2 + 135x + 27) \\
&= -2x^6 - 165x^5 - 247x^4 - 495x^3 - 239x^2 - 205x + 22.
\end{aligned}$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 3 - Uitwerking

❶ $D = x^2 + 2x + 1, d = x - 2;$

Horner:

$$\begin{array}{r|rr|r} & 1 & 2 & 1 \\ 2 & & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 4 & 9 \end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \\ -(x^2 - 2x) \\ \hline 4x + 1 \\ -(4x - 8) \\ \hline 9 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x - 2 \\ \hline x + 4 \end{array} \right.$$

❷ $D = x^2 + 2x + 1, d = x + 4;$

Horner:

$$\begin{array}{r|rr|r} & 1 & 2 & 1 \\ -4 & & -4 & 8 \\ \hline & 1 & -2 & 9 \end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \\ -(x^2 + 4x) \\ \hline -2x + 1 \\ -(-2x - 8) \\ \hline 9 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x + 4 \\ \hline x - 2 \end{array} \right.$$

❸ $D = x^2 + 2x + 1, d = x + 1;$

Horner:

$$\begin{array}{r|rr|r} & 1 & 2 & 1 \\ -1 & & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
x^2 + 2x + 1 \\
-(x^2 + x) \\
\hline
x + 1 \\
-(x + 1) \\
\hline
0
\end{array}
&
\begin{array}{l}
x + 1 \\
x + 1
\end{array}
\end{array}$$

④ $D = x^2 + 2x + 1, d = -x - 3;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
x^2 + 2x + 1 \\
-(x^2 + 3x) \\
\hline
-x + 1 \\
-(-x - 3) \\
\hline
4
\end{array}
&
\begin{array}{l}
-x - 3 \\
-x + 1
\end{array}
\end{array}$$

⑤ $D = x^3 + 3x^2 + 5x - 7, d = x - 2;$

Horner:

$$\begin{array}{r|rrrr}
& 1 & 3 & 5 & -7 \\
2 & & 2 & 10 & 30 \\
\hline
& 1 & 5 & 15 & 23
\end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
x^3 + 3x^2 + 5x - 7 \\
-(x^3 - 2x^2) \\
\hline
5x^2 + 5x - 7 \\
-(5x^2 - 10x) \\
\hline
15x - 7 \\
-(15x - 30) \\
\hline
23
\end{array}
&
\begin{array}{l}
x - 2 \\
x^2 + 5x + 15
\end{array}
\end{array}$$

⑥ $D = x^3 + 3x^2 + 5x - 7, d = x + 1;$

Horner:

$$\begin{array}{r|rrrr}
& 1 & 3 & 5 & -7 \\
-1 & & -1 & -2 & -3 \\
\hline
& 1 & 2 & 3 & -10
\end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{r}
x^3 + 3x^2 + 5x - 7 \\
-(x^3 + x^2) \\
\hline
2x^2 + 5x - 7 \\
-(2x^2 + 2x) \\
\hline
3x - 7 \\
-(3x + 3) \\
\hline
-10
\end{array}
\quad \Bigg| \quad
\begin{array}{r}
x + 1 \\
x^2 + 2x + 3
\end{array}
\end{array}$$

7 $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, d = x - 2;$

Horner:

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\
& & 2 & 12 & 20 \\
\hline
& 1 & 6 & 10 & 21
\end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{r}
x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \\
-(x^3 - 2x^2) \\
\hline
6x^2 - 2x + 1 \\
-(6x^2 - 12x) \\
\hline
10x + 1 \\
-(10x - 20) \\
\hline
21
\end{array}
\quad \Bigg| \quad
\begin{array}{r}
x - 2 \\
x^2 + 6x + 10
\end{array}
\end{array}$$

8 $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, d = x + \frac{1}{2};$

Horner:

$$\begin{array}{r|rrrr}
-\frac{1}{2} & 1 & 4 & -2 & 1 \\
& & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{15}{8} \\
\hline
& 1 & \frac{7}{2} & -\frac{15}{4} & \frac{23}{8}
\end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{r}
x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \\
-(x^3 + \frac{1}{2}x^2) \\
\hline
\frac{7}{2}x^2 - 2x + 1 \\
-(\frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{4}x) \\
\hline
-\frac{15}{4}x + 1 \\
-(-\frac{15}{4}x - \frac{15}{8}) \\
\hline
\frac{23}{8}
\end{array}
\quad \Bigg| \quad
\begin{array}{r}
x + \frac{1}{2} \\
x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{15}{4}
\end{array}
\end{array}$$

9 $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, d = 2x - 1;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \\
-(x^3 - \frac{1}{2}x^2) \\
\hline
\frac{9}{2}x^2 - 2x + 1 \\
-(\frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{4}x) \\
\hline
\frac{1}{4}x + 1 \\
-(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}) \\
\hline
\frac{9}{8}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\frac{2x - 1}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{1}{8}}
\end{array}
\end{array}$$

10 $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, d = x - 1;$

Horner:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
& 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
-(x^4 - x^3) \\
\hline
2x^3 + x^2 + x + 1 \\
-(2x^3 - 2x^2) \\
\hline
3x^2 + x + 1 \\
-(3x^2 - 3x) \\
\hline
4x + 1 \\
-(4x - 4) \\
\hline
5
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\frac{x - 1}{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}
\end{array}
\end{array}$$

11 $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, d = x + 1;$

Horner:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & & -1 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
& 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
-(x^4 + x^3) \\
\hline
x^2 + x + 1 \\
-(x^2 + x) \\
\hline
1
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\frac{x + 1}{x^3 + x}
\end{array}
\end{array}$$

12 $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, d = x - \frac{1}{2};$

Horner:

$$\begin{array}{c|cccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{7}{8} & \frac{15}{16} & \\ \hline & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} & \frac{15}{8} & \frac{31}{16} \end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ - (x^4 - \frac{1}{2}x^3) \\ \hline \frac{3}{2}x^3 + x^2 + x + 1 \\ - (\frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2) \\ \hline \frac{7}{4}x^2 + x + 1 \\ - (\frac{7}{4}x^2 - \frac{7}{8}x) \\ \hline \frac{15}{8}x + 1 \\ - (\frac{15}{8}x - \frac{15}{16}) \\ \hline \frac{31}{16} \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x - \frac{1}{2} \\ x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{15}{8} \end{array} \right.$$

13 $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, d = x + \frac{1}{2};$

Horner:

$$\begin{array}{c|cccc|c} -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{5}{16} & \\ \hline & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{11}{16} \end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ - (x^4 + \frac{1}{2}x^3) \\ \hline \frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 1 \\ - (\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2) \\ \hline \frac{3}{4}x^2 + x + 1 \\ - (\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x) \\ \hline \frac{5}{8}x + 1 \\ - (\frac{5}{8}x + \frac{5}{16}) \\ \hline \frac{11}{16} \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x + \frac{1}{2} \\ x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{8} \end{array} \right.$$

14 $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, d = 2x + 3;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
-(x^4 + \frac{3}{2}x^3) \\
\hline
-\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 1 \\
-(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2) \\
\hline
\frac{7}{4}x^2 + x + 1 \\
-(\frac{7}{4}x^2 + \frac{21}{8}x) \\
\hline
-\frac{13}{8}x + 1 \\
-(\frac{13}{8}x - \frac{39}{16}) \\
\hline
\frac{55}{16}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\frac{2x + 3}{\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{8}x - \frac{13}{16}}
\end{array}
\end{array}$$

15 $D = x^3 + 2x + 1, d = x - 1;$

Horner:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
& 1 & 0 & 2 & 1 \\
1 & & 1 & 1 & 3 \\
\hline
& 1 & 1 & 3 & 4
\end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
x^3 + 2x + 1 \\
-(x^3 - x^2) \\
\hline
x^2 + 2x + 1 \\
-(x^2 - x) \\
\hline
3x + 1 \\
-(3x - 3) \\
\hline
4
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\frac{x - 1}{x^2 + x + 3}
\end{array}
\end{array}$$

16 $D = x^3 + 2x + 1, d = x + 1;$

Horner:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
& 1 & 0 & 2 & 1 \\
-1 & & -1 & 1 & -3 \\
\hline
& 1 & -1 & 3 & -2
\end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
x^3 + 2x + 1 \\
-(x^3 + x^2) \\
\hline
-x^2 + 2x + 1 \\
-(-x^2 - x) \\
\hline
3x + 1 \\
-(3x + 3) \\
\hline
-2
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\frac{x + 1}{x^2 - x + 3}
\end{array}
\end{array}$$

17 $D = x - x^3 - 7 + 5x^2 = -x^3 + 5x^2 + x - 7, d = 1 + x = x + 1;$

Horner:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
& -1 & 5 & 1 & -7 \\
-1 & & 1 & -6 & 5 \\
\hline
& -1 & 6 & -5 & -2
\end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{r}
-x^3 \quad + \quad 5x^2 \quad + \quad x \quad - \quad 7 \\
-(\quad -x^3 \quad - \quad x^2 \quad) \\
\hline
\quad \quad \quad 6x^2 \quad + \quad x \quad - \quad 7 \\
-(\quad 6x^2 \quad + \quad 6x \quad) \\
\hline
\quad \quad \quad \quad -5x \quad - \quad 7 \\
-(\quad -5x \quad - \quad 5 \quad) \\
\hline
\quad \quad \quad \quad \quad \quad -2
\end{array}
\quad \left| \begin{array}{r}
x \quad + \quad 1 \\
-x^2 \quad + \quad 6x \quad - \quad 5 \\
\hline
\end{array} \right.
\end{array}$$

18 $D = 1 - x^4 + 5x^2 = -x^4 + 5x^2 + 1, d = 2 - x = -x + 2;$

Euclides:

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{r}
-x^4 \quad \quad \quad + \quad 5x^2 \quad \quad \quad + \quad 1 \\
-(\quad -x^4 \quad + \quad 2x^3 \quad) \\
\hline
\quad \quad \quad -2x^3 \quad + \quad 5x^2 \quad \quad \quad + \quad 1 \\
-(\quad -2x^3 \quad + \quad 4x^2 \quad) \\
\hline
\quad \quad \quad \quad x^2 \quad \quad \quad + \quad 1 \\
-(\quad x^2 \quad - \quad 2x \quad) \\
\hline
\quad \quad \quad \quad \quad \quad 2x \quad + \quad 1 \\
-(\quad 2x \quad - \quad 4 \quad) \\
\hline
\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 5
\end{array}
\quad \left| \begin{array}{r}
-x \quad + \quad 2 \\
x^3 \quad + \quad 2x^2 \quad - \quad x \quad - \quad 2 \\
\hline
\end{array} \right.
\end{array}$$

19 $D = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, d = x - 1;$

Horner:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
& 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & & 1 & 5 & 11 & 15 \\
\hline
& 1 & 5 & 11 & 15 & 16
\end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{r}
x^4 \quad + \quad 4x^3 \quad + \quad 6x^2 \quad + \quad 4x \quad + \quad 1 \\
-(\quad x^4 \quad - \quad x^3 \quad) \\
\hline
\quad \quad \quad 5x^3 \quad + \quad 6x^2 \quad + \quad 4x \quad + \quad 1 \\
-(\quad 5x^3 \quad - \quad 5x^2 \quad) \\
\hline
\quad \quad \quad \quad 11x^2 \quad + \quad 4x \quad + \quad 1 \\
-(\quad 11x^2 \quad - \quad 11x \quad) \\
\hline
\quad \quad \quad \quad \quad \quad 15x \quad + \quad 1 \\
-(\quad 15x \quad - \quad 15 \quad) \\
\hline
\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 16
\end{array}
\quad \left| \begin{array}{r}
x \quad - \quad 1 \\
x^3 \quad + \quad 5x^2 \quad + \quad 11x \quad + \quad 15 \\
\hline
\end{array} \right.
\end{array}$$

20 $D = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, d = x + 1;$

Horner:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ -1 & & -1 & -3 & -3 & -1 \\ \hline & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ -(x^4 + x^3) \\ \hline 3x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ -(3x^3 + 3x^2) \\ \hline 3x^2 + 4x + 1 \\ -(3x^2 + 3x) \\ \hline x + 1 \\ -(x + 1) \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{r} x + 1 \\ \hline x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \end{array} \end{array}$$

Theorie OK Opl

Oefening 4 - Uitwerking

① $D = x^2 + 2x + 1, d = x^2 - x + 2;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \\ -(x^2 - x + 2) \\ \hline 3x - 1 \end{array} & \begin{array}{r} x^2 - x + 2 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

② $D = 3x^2 + 2x + 1, d = x^2 - x + 2;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 3x^2 + 2x + 1 \\ -(3x^2 - 3x + 6) \\ \hline 5x - 5 \end{array} & \begin{array}{r} x^2 - x + 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

③ $D = 4x^2 - 4x + 8, d = 2x^2 - 3x + 4;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 4x^2 - 4x + 8 \\ -(4x^2 - 6x + 8) \\ \hline 2x \end{array} & \begin{array}{r} 2x^2 - 3x + 4 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

④ $D = -3x^2 - 2x + 9, d = 3x^2 + 1;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} -3x^2 - 2x + 9 \\ -(-3x^2 - 1) \\ \hline -2x + 10 \end{array} & \begin{array}{r} 3x^2 + 1 \\ -1 \end{array} \end{array}$$

⑤ $D = x^2 + 3x + 5, d = x^2 - 2;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^2 + 3x + 5 \\ -(x^2 - 2) \\ \hline 3x + 7 \end{array} & \begin{array}{r} x^2 - 2 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

⑥ $D = x^2 + 5, d = x^2 + x + 2;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^2 + 5 \\ -(x^2 + x + 2) \\ \hline -x + 3 \end{array} & \begin{array}{r} x^2 + x + 2 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

7 $D = x^2 + 6x, d = x^2 + 2x;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^2 + 6x \\ -(x^2 + 2x) \\ \hline 4x \end{array} & \begin{array}{r} x^2 + 2x \\ \hline 1 \end{array} \end{array}$$

8 $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, d = x^2 - 2x + 8;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \\ -(x^3 - 2x^2 + 8x) \\ \hline 6x^2 - 10x + 1 \\ -(6x^2 - 12x + 48) \\ \hline 2x - 47 \end{array} & \begin{array}{r} x^2 - 2x + 8 \\ \hline x + 6 \end{array} \end{array}$$

9 $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, d = 2x^2 - 3x + 1;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \\ -(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x) \\ \hline \frac{11}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \\ -(\frac{11}{2}x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{11}{4}) \\ \hline \frac{23}{4}x - \frac{7}{4} \end{array} & \begin{array}{r} 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline \frac{1}{2}x + \frac{11}{4} \end{array} \end{array}$$

10 $D = x^3 - 2x + 1, d = x^2 - 3x;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^3 - 2x + 1 \\ -(x^3 - 3x^2) \\ \hline 3x^2 - 2x + 1 \\ -(3x^2 - 9x) \\ \hline 7x + 1 \end{array} & \begin{array}{r} x^2 - 3x \\ \hline x + 3 \end{array} \end{array}$$

11 $D = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1, d = x^2 - 2x + 5;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \\ -(x^4 - 2x^3 + 5x^2) \\ \hline -2x^2 - 2x + 1 \\ -(-2x^2 + 4x - 10) \\ \hline -6x + 11 \end{array} & \begin{array}{r} x^2 - 2x + 5 \\ \hline x^2 - 2 \end{array} \end{array}$$

12 $D = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1, d = x^2 - 2;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \\
-(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1) \\
\hline
-2x^3 + 5x^2 - 2x + 1 \\
-(-2x^3 + 5x^2 - 6x + 1) \\
\hline
5x^2 - 6x + 1 \\
-(5x^2 - 10x + 11) \\
\hline
-6x + 11
\end{array}
&
\begin{array}{l}
x^2 - 2x + 5 \\
\hline
\end{array}
\end{array}$$

13 $D = x^4 - 2x^3 - 2x + 1, d = x^3 - 2x + 1;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
x^4 - 2x^3 - 2x + 1 \\
-(x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x) \\
\hline
-2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \\
-(-2x^3 + 2x^2 + 4x - 2) \\
\hline
2x^2 - 7x + 3
\end{array}
&
\begin{array}{l}
x^3 - 2x + 1 \\
\hline
x - 2
\end{array}
\end{array}$$

14 $D = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1, d = x^4 - 5;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \\
-(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 6) \\
\hline
-5
\end{array}
&
\begin{array}{l}
x^4 - 5 \\
\hline
1
\end{array}
\end{array}$$

15 $D = x^4 - 3x^3 + 5x^2, d = x^4 + x^3 - 5;$

Euclides:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
x^4 - 3x^3 + 5x^2 \\
-(x^4 + x^3 - 5) \\
\hline
-4x^3 + 5x^2 + 5
\end{array}
&
\begin{array}{l}
x^4 + x^3 - 5 \\
\hline
1
\end{array}
\end{array}$$

Theorie OK Opl

Oefening 5 - Uitwerking

- 1 $ax + 3x$
 $= a \textcolor{yellow}{x} + 3 \textcolor{yellow}{x}$
 $= (a + 3) \textcolor{yellow}{x}$
 $= (a + 3)x$
- 2 $x^3 - 4x^2$
 $= x \textcolor{yellow}{x^2} - 4 \textcolor{yellow}{x^2}$
 $= (x - 4) \textcolor{yellow}{x^2}$
 $= (x - 4)x^2$
- 3 $x^2y - xy^2$
 $= x \textcolor{yellow}{xy} - \textcolor{yellow}{xy} y$
 $= (x - y) \textcolor{yellow}{xy}$
 $= (x - y)xy$
- 4 $18x^5 - 12x^3$
 $= \textcolor{yellow}{6} \cdot 3 \textcolor{yellow}{x^3} x^2 - \textcolor{yellow}{6} \cdot 2 \textcolor{yellow}{x^3}$
 $= \textcolor{yellow}{6} \textcolor{yellow}{x^3} (3x^2 - 2)$
 $= 6x^3(3x^2 - 2)$
- 5 $16a^2x^2 - 4ax^2$
 $= \textcolor{yellow}{4} \cdot 4 \textcolor{yellow}{a} \textcolor{yellow}{a} \textcolor{yellow}{x^2} - \textcolor{yellow}{4} \textcolor{yellow}{a} \textcolor{yellow}{x^2} 1$
 $= \textcolor{yellow}{4} \textcolor{yellow}{a} \textcolor{yellow}{x^2} (4a - 1)$
 $= 4ax^2(4a - 1)$
- 6 $15x^3 - 10x^2 + 5x$
 $= \textcolor{yellow}{5x} 3x^2 - \textcolor{yellow}{5x} 2x + \textcolor{yellow}{5x} 1$
 $= \textcolor{yellow}{5x} (3x^2 - 2x + 1)$
 $= 5x(3x^2 - 2x + 1)$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{7} \quad 14a^3b^2 + 35a^2b^3 - 28a^4b \\
& = 7a^2b \, 2ab + 7a^2b \, 5b^2 - 7a^2b \, 4a^2 \\
& = 7a^2b (2ab + 5b^2 + 4a^2) \\
& = 7a^2b(4a^2 + 2ab + 5b^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{8} \quad (a - b)x + (a - b)y \\
& = (a - b) \, x + (a - b) \, y \\
& = (a - b) (x + y) \\
& = (a - b)(x + y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{9} \quad (x - 5)x + (5 - x)y \\
& = (x - 5)x + (-(x - 5))y \\
& = (x - 5)x - (x - 5)y \\
& = (x - 5) \, x - (x - 5) \, y \\
& = (x - 5) (x - y) \\
& = (x - 5)(x - y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{10} \quad 2a(-x - y) - 7(x + y) \\
& = -2a(x + y) - 7(x + y) \\
& = -2a \, (x + y) - 7 \, (x + y) \\
& = (-2a - 7) (x + y) \\
& = (-2a - 7)(x + y) \\
& = -(2a + 7)(x + y)
\end{aligned}$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 6 - Uitwerking

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad x^2 - 25 &= x^2 - 5^2 \\ &= \boxed{x}^2 - \boxed{5}^2 \\ &= (\boxed{x} - \boxed{5})(\boxed{x} + \boxed{5}) \\ &= (x - 5)(x + 5) \\ \textcircled{2} \quad 4a^2 - 1 &= \boxed{(2a)}^2 - \boxed{1}^2 \\ &= (\boxed{(2a)} - \boxed{1})(\boxed{(2a)} + \boxed{1}) \\ &= (2a - 1)(2a + 1) \\ \textcircled{3} \quad 49x^2 - 9y^2 &= \boxed{(7x)}^2 - \boxed{(3y)}^2 \\ &= (\boxed{7x} - \boxed{3y})(\boxed{7x} + \boxed{3y}) \\ &= (7x - 3y)(7x + 3y) \\ \textcircled{4} \quad x^3y - xy^3 &= \boxed{xy}x^2 - \boxed{xy}y^2 \\ &= \boxed{xy}(\boxed{x}^2 - \boxed{y}^2) \\ &= \boxed{xy}(\boxed{x} - \boxed{y})(\boxed{x} + \boxed{y}) \\ &= xy(x - y)(x + y) \\ \textcircled{5} \quad 8a^2 - 18 &= \boxed{2} \cdot 4a^2 - \boxed{2} \cdot 9 \\ &= \boxed{2}(4a^2 - 9) \\ &= \boxed{2}(\boxed{(2a)}^2 - \boxed{3}^2) \\ &= \boxed{2}(\boxed{2a} - \boxed{3})(\boxed{2a} + \boxed{3}) \\ &= 2(2a - 3)(2a + 3) \\ \textcircled{6} \quad a^4 - 1 &= \boxed{(a^2)}^2 - \boxed{1}^2 \\ &= (\boxed{a^2} - \boxed{1})(\boxed{a^2} + \boxed{1}) \\ &= (a^2 - 1)(a^2 + 1) \\ &= (\boxed{a}^2 - \boxed{1}^2)(a^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) \\
&= (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) \\
\textcircled{7} \quad x^4 - 81 &= (x^2)^2 - 9^2 \\
&= (x^2 - 9)(x^2 + 9) \\
&= (x^2 - 9)(x^2 + 9) \\
&= (x^2 - 3^2)(x^2 + 9) \\
&= (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) \\
&= (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) \\
\textcircled{8} \quad 2x^5 - 32x &= 2x x^4 - 2x 16 \\
&= 2x(x^4 - 16) \\
&= 2x((x^2)^2 - 4^2) \\
&= 2x(x^2 - 4)(x^2 + 4) \\
&= 2x(x^2 - 4)(x^2 + 4) \\
&= 2x(x^2 - 2^2)(x^2 + 4) \\
&= 2x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) \\
&= 2x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) \\
\textcircled{9} \quad (x - y)^2 - 9 &= (x - y)^2 - 3^2 \\
&= ((x - y) - 3)((x - y) + 3) \\
&= ((x - y) - 3)((x - y) + 3) \\
&= (x - y - 3)(x - y + 3) \\
\textcircled{10} \quad x^2 - (y + 2)^2 &= x^2 - (y + 2)^2 \\
&= (x - (y + 2))(x + (y + 2)) \\
&= (x - (y + 2))(x + (y + 2)) \\
&= (x - y - 2)(x + y + 2)
\end{aligned}$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 7 - Uitwerking

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad x^3 - 8 &= \boxed{x}^3 - \boxed{2}^3 \\
 &= (\boxed{x} - \boxed{2})(\boxed{x}^2 + \boxed{x}\boxed{2} + \boxed{2}^2) \\
 &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad a^3 + 1 &= \boxed{a}^3 + \boxed{1}^3 \\
 &= (\boxed{a} + \boxed{1})(\boxed{a}^2 - \boxed{a}\boxed{1} + \boxed{1}^2) \\
 &= (a + 1)(a^2 - a + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad y^3 - 27 &= \boxed{y}^3 - \boxed{3}^3 \\
 &= (\boxed{y} - \boxed{3})(\boxed{y}^2 + \boxed{y}\boxed{3} + \boxed{3}^2) \\
 &= (y - 3)(y^2 + 3y + 9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \quad 27x^3 + 8 &= \boxed{3x}^3 + \boxed{2}^3 \\
 &= (\boxed{3x} + \boxed{2})(\boxed{3x}^2 - \boxed{3x}\boxed{2} + \boxed{2}^2) \\
 &= (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{5} \quad 27 + x^6 &= \boxed{3}^3 + \boxed{(x^2)}^3 \\
 &= (\boxed{3} + \boxed{x^2})(\boxed{3}^2 - \boxed{3}\boxed{x^2} + \boxed{(x^2)}^2) \\
 &= (3 + x^2)(9 - 3x^2 + x^4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{6} \quad 27x^3 + \frac{1}{27} &= \boxed{(3x)}^3 + \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)}^3 \\
 &= (\boxed{3x} + \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)})(\boxed{(3x)}^2 - \boxed{3x}\boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)}^2) \\
 &= \left(3x + \frac{1}{3}\right)\left(9x^2 - x + \frac{1}{9}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{7} \quad x^4 - x &= \boxed{x}x^3 - \boxed{x}1 \\
 &= \boxed{x}(x^3 - 1) \\
 &= x(\boxed{x}^3 - \boxed{1}^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x(\boxed{x} - \boxed{1})(\boxed{x}^2 + \boxed{x}\boxed{1} + \boxed{1}^2) \\
&= x(x-1)(x^2+x+1) \\
\textcircled{8} \quad a^6 - b^6 &= (\boxed{a^3})^2 - (\boxed{b^3})^2 \\
&= (\boxed{a^3} - \boxed{b^3})(\boxed{a^3} + \boxed{b^3}) \\
&= (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) \\
&= (a-b)(a^2 + ab + b^2)(a+b)(a^2 - ab + b^2) \\
&= (a-b)(a+b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2) \\
\textcircled{9} \quad 64 - x^6 &= 8^2 - (x^3)^2 \\
&= (8 - x^3)(8 + x^3) \\
&= (2^3 - x^3)(2^3 + x^3) \\
&= (2-x)(2^2 + 2x + x^2)(2+x)(2^2 - 2x + x^2) \\
&= (2-x)(4 + 2x + x^2)(2+x)(4 - 2x + x^2) \\
\textcircled{10} \quad x^7 - x &= x(x^6 - 1) \\
&= x((x^3)^2 - 1^2) \\
&= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) \\
&= x(x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1)
\end{aligned}$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 8 - Uitwerking

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad 9x^2 + 24x + 16 &= \boxed{(3x)^2} + 2\boxed{(3x)}\boxed{(4)} + \boxed{4^2} \\
 &= (\boxed{3x} + \boxed{4})^2 \\
 &= (3x + 4)^2 \\
 \textcircled{2} \quad x^2 - 4x + 4 &= \boxed{x^2} - 2\boxed{2}\boxed{x} + \boxed{2^2} \\
 &= (\boxed{x} - \boxed{2})^2 \\
 &= (x - 2)^2 \\
 \textcircled{3} \quad 4x^2 + 1 - 4x &= 4x^2 - 4x + 1 \\
 &= \boxed{(2x)^2} - 2\boxed{2x}\boxed{1} + \boxed{1^2} \\
 &= (\boxed{2x} - \boxed{1})^2 \\
 &= (2x - 1)^2 \\
 \textcircled{4} \quad 1 + 4x^2 + 4x^4 &= \boxed{1^2} + 2\boxed{1}\boxed{2x^2} + \boxed{(2x^2)^2} \\
 &= (\boxed{1} + \boxed{2x^2})^2 \\
 &= (1 + 2x^2)^2 \\
 \textcircled{5} \quad x^3 + 2x^2 + x &= \boxed{x}x^2 + 2\boxed{x}x + \boxed{x}1 \\
 &= \boxed{x}(x^2 + 2x + 1) \\
 &= x(\boxed{x^2} + 2\boxed{x}\boxed{1} + \boxed{1^2}) \\
 &= x(\boxed{x} + \boxed{1})^2 \\
 &= x(x + 1)^2 \\
 \textcircled{6} \quad 10x - 25 - x^2 &= -x^2 + 10x - 25 \\
 &= -(x^2 - 10x + 25) \\
 &= -(\boxed{x^2} - 2\boxed{x}\boxed{5} + \boxed{5^2}) \\
 &= -(\boxed{x} - \boxed{5})^2 \\
 &= -(x - 5)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{7} \quad 1 - 4x^2 + 4x^4 &= \boxed{1}^2 - 2\boxed{1}\boxed{2x^2} + \boxed{(2x^2)}^2 \\
&= (\boxed{1} - \boxed{2x^2})^2 \\
&= (1 - 2x^2)^2 \\
&= (\boxed{1}^2 - \boxed{(\sqrt{2}x)}^2)^2 \\
&= ((\boxed{1} - \boxed{\sqrt{2}x})(\boxed{1} + \boxed{\sqrt{2}x}))^2 \\
&= ((1 - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x))^2 \\
&= (1 - \sqrt{2}x)^2(1 + \sqrt{2}x)^2 \\
\textcircled{8} \quad x^6 + 2x^3 + 1 &= \boxed{(x^3)}^2 + 2\boxed{x^3}\boxed{1} + \boxed{1}^2 \\
&= (\boxed{x^3} + \boxed{1})^2 \\
&= (x^3 + 1)^2 \\
&= ((x + 1)(x^2 - x + 1))^2 \\
&= (x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2 \\
\textcircled{9} \quad x^7 - 2x^4 + x &= x(x^6 - 2x^3 + 1) \\
&= x(x^3 - 1)^2 \\
&= x((x - 1)(x^2 + x + 1))^2 \\
&= x(x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2 \\
\textcircled{10} \quad x^8 - 8x^4 + 16 &= (x^4)^2 - 2 \cdot 4 \cdot x^4 + 4^2 \\
&= (x^4 - 4)^2 \\
&= ((x^2)^2 - 2^2)^2 \\
&= ((x^2 - 2)(x^2 + 2))^2 \\
&= ((x^2 - (\sqrt{2})^2)(x^2 + 2))^2 \\
&= ((x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2))^2 \\
&= (x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2(x^2 + 2)^2 \\
\textcircled{11} \quad 2a^6 - 4a^3b^2 + 2b^4 &= 2((a^3)^2 - 2a^3b^2 + (b^2)^2) \\
&= 2(a^3 - b^2)^2 \\
\textcircled{12} \quad 2a^6 - 32a^3 + 128 &= 2(a^6 - 16a^3 + 64) \\
&= 2((a^3)^2 - 2a^3 \cdot 8 + 8^2) \\
&= 2(a^3 - 8)^2 \\
&= 2(a^3 - 2^3)^2
\end{aligned}$$

$$= 2((a - 2)(a^2 + 2a + 2^2))^2$$

$$= 2(a - 2)^2(a^2 + 2a + 4)^2$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 9 - Uitwerking

- ① $a^3 + 6a^2 + 12a + 8 = a^3 + 3a^2 \cdot 2 + 3a \cdot 2^2 + 2^3$
 $= (a + 2)^3$
 $= (a + 2)^3$
- ② $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 3y + 3x \cdot (3y)^2 - (3y)^3$
 $= (x - 3y)^3$
 $= (x - 3y)^3$
- ③ $2a^3b - 6a^2bc + 6abc^2 - 2bc^3 = 2b(a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3)$
 $= 2b(a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3)$
 $= 2b(a - c)^3$
- ④ $x^6 - x^5 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{27}x^3 = \frac{1}{27}x^3(27x^3 - 27x^2 + 9x - 1)$
 $= \frac{1}{27}x^3(3x - 1)^3$
- ⑤ $-64b^3 - 12b + 1 + 48b^2 = 1 - 12b + 48b^2 - 64b^3$
 $= 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot (4b) + 3 \cdot 1 \cdot (4b)^2 - (4b)^3$
 $= (1 - 4b)^3$
 $= (1 - 4b)^3$

Theorie

OK

Opl

Oefening 10 - Uitwerking

- 1** $xy + ax + 2y + 2a = (xy + ax) + (2y + 2a)$
 $= x(y + a) + 2(y + a)$
 $= (x + 2)(y + a)$
- 2** $x^2 - 3xy - 2ax + 6ay = (x^2 - 3xy) - (2ax - 6ay)$
 $= x(x - 3y) - 2a(x - 3y)$
 $= (x - 2a)(x - 3y)$
- 3** $ax - x - a + 1 = (ax - x) - (a - 1)$
 $= x(a - 1) - (a - 1)$
 $= (x - 1)(a - 1)$
- 4** $6x^2 - 6y + 4x - 9xy = (4x - 6y) + (6x^2 - 9xy)$
 $= 2(2x - 3y) + 3x(2x - 3y)$
 $= (2 + 3x)(2x - 3y)$
- 5** $a^2bx - ab^2 - ax^2 + bx = (a^2bx - ab^2) - (ax^2 - bx)$
 $= ab(ax - b) - x(ax - b)$
 $= (ab - x)(ax - b)$
- 6** $x^2 - 4 + xy + 2y = (x^2 - 4) + (xy + 2y)$
 $= (x - 2)(x + 2) + (x + 2)y$
 $= (x + 2)((x - 2) + y)$
 $= (x + 2)(x + y - 2)$
- 7** $a^2 - 2a - 2b - b^2 = (a^2 - b^2) + (-2a - 2b)$
 $= (a - b)(a + b) - 2(a + b)$
 $= (a + b)(a - b - 2)$
- 8** $x + y + x^3 + y^3 = (x + y) + (x^3 + y^3)$
 $= (x + y) + (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$$\begin{aligned}
&= (x+y)(1+(x^2-xy+y^2)) \\
&= (x+y)(x^2-xy+y^2+1) \\
\textcircled{9} \quad x^3-y^3+x^2-y^2 &= (x^3-y^3)+(x^2-y^2) \\
&= (x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)(x+y) \\
&= (x-y)((x^2+xy+y^2)+(x+y)) \\
&= (x-y)(x^2+xy+y^2+x+y) \\
\textcircled{10} \quad x^5-x^3y^2+x^2y^3-y^5 &= (x^5-x^3y^2)+(x^2y^3-y^5) \\
&= x^3(x^2-y^2)+y^3(x^2-y^2) \\
&= (x^3+y^3)(x^2-y^2) \\
&= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x+y) \\
&= (x+y)^2(x-y)(x^2-xy+y^2) \\
\textcircled{11} \quad a^3-2a^2-b^3+2b^2 &= (a^3-b^3)+(-2a^2+2b^2) \\
&= (a^3-b^3)-2(a^2-b^2) \\
&= (a-b)(a^2+ab+b^2)-2(a-b)(a+b) \\
&= (a-b)(a^2+ab+b^2-2a-2b) \\
\textcircled{12} \quad x^2+6x+9-y^2 &= (x^2+6x+9)-y^2 \\
&= (x+3)^2-y^2 \\
&= ((x+3)-y)((x+3)+y) \\
&= (x-y+3)(x+y+3) \\
\textcircled{13} \quad 4x^2-25-4xy+y^2 &= (4x^2-4xy+y^2)-25 \\
&= (2x-y)^2-25 \\
&= (2x-y)^2-5^2 \\
&= ((2x-y)-5)((2x-y)+5) \\
&= (2x-y-5)(2x-y+5) \\
\textcircled{14} \quad a^2+b^2-2ab-c^2 &= (a^2-2ab+b^2)-c^2 \\
&= (a-b)^2-c^2 \\
&= ((a-b)-c)((a-b)+c) \\
&= (a-b-c)(a-b+c) \\
\textcircled{15} \quad x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-8 &= (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)-8 \\
&= (x+y)^3-8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x+y)^3 - 2^3 \\
&= ((x+y) - 2)((x+y)^2 + 2(x+y) + 2^2) \\
&= (x+y-2)(x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 4) \\
\textcircled{16} \quad x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 8x^3 &= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 8x^3 \\
&= (x+1)^3 - 8x^3 \\
&= (x+1)^3 - (2x)^3 \\
&= ((x+1) - 2x)((x+1)^2 + (x+1)2x + (2x)^2) \\
&= (-x+1)(x^2 + 2x + 1 + 2x^2 + 2x + 4x^2) \\
&= -(x-1)(7x^2 + 4x + 1) \\
\textcircled{17} \quad x^4 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 \\
&= (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 \\
&= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 \\
&= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 \\
&= ((x^2 + 1) - \sqrt{2}x)((x^2 + 1) + \sqrt{2}x) \\
&= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)
\end{aligned}$$

Theorie

OK

Opl

Vergelijkingen - Opgaven

Oefening 1 - Opgave



Los op (naar de onbekende x):

- ❶ $5x - 25 = 0$
- ❷ $7x + 50 = 1$
- ❸ $3x - 24 = 5x + 26$
- ❹ $27 + 3x = -5x + 7$
- ❺ $(3x - 2) + 2(2x - 5) = 4(x - 7) - 2(x - 8)$
- ❻ $2x + 15 = 2(x - 3)$
- ❼ $5x + 5(x - 4) = 10(x - 2)$
- ❽ $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 7(x - 6)$
- ❾ $4(x + 1)^2 = (2x + 3)^2 - 7(x + 1)$
- ❿ $(y + 1)x + (y - 1)^2 = 5$

Theorie

Opl

Oefening 2 - Opgave



Los op (naar de onbekende x):

- ❶ $x^2 - 3x + 2 = 0$
- ❷ $x^2 = 4(x - 1)$
- ❸ $2x^2 + x - 1 = 0$
- ❹ $10x^2 + 3x - 1 = 0$
- ❺ $x^2 + x = -2$
- ❻ $2x + 15 = 2(x - 3)$
- ❼ $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 7(x - 6)$
- ❽ $4(x + 1)^2 + (2x + 3)^2 - 7(x + 1) = 0$
- ❾ $x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$
- ❿ $yx^2 + 4x = 5$

Theorie

Opl

Vergelijkingen - Oplossing

Oefening 1 - Oplossing

- ① $5x - 25 = 0 \Rightarrow x = 5$
- ② $7x + 50 = 1 \Rightarrow x = -7$
- ③ $3x - 24 = 5x + 26 \Rightarrow x = -25$
- ④ $27 + 3x = -5x + 7 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$
- ⑤ $(3x - 2) + 2(2x - 5) = 4(x - 7) - 2(x - 8) \Rightarrow x = 0$
- ⑥ $2x + 15 = 2(x - 3)$ geen oplossingen
- ⑦ $5x + 5(x - 4) = 10(x - 2)$ alle $x \in \mathbb{R}$
- ⑧ $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 7(x - 6) \Rightarrow x = -14$
- ⑨ $4(x + 1)^2 = (2x + 3)^2 - 7(x + 1) \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$
- ⑩ $(y + 1)x + (y - 1)^2 = 5$
 $y \neq -1 \Rightarrow x = \frac{-y^2 + 2y + 4}{y + 1},$
 $y = -1 \Rightarrow$ geen oplossingen

Theorie

OK

Detail

Oefening 2 - Oplossing

- ① $x^2 - 3x + 2 = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$
- ② $x^2 = 4(x - 1), \quad x = 2$
- ③ $2x^2 + x - 1 = 0 \quad x = -1, \quad x = \frac{1}{2}$
- ④ $10x^2 + 3x - 1 = 0 \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{5}$
- ⑤ $x^2 + x = -2 \quad \text{geen oplossingen}$
- ⑥ $2x + 15 = 2(x - 3) \quad \text{geen oplossingen}$
- ⑦ $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 7(x - 6) \quad \text{geen oplossingen}$
- ⑧ $4(x + 1)^2 + (2x + 3)^2 - 7(x + 1) = 0 \quad \text{geen oplossingen}$
- ⑨ $x^2 + 4xy + 4y^2 = 0 \quad x = -2y$
- ⑩ $yx^2 + 4x = 5$
 $y = 0 : \quad x = \frac{5}{4}$
 $y > -\frac{4}{5} : \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20y}}{2y}$
 $y = -\frac{4}{5} : \quad x = -\frac{5}{2}$
 $y < -\frac{4}{5} : \quad \text{geen oplossingen}$

Theorie

OK

Detail

Vergelijkingen - Uitwerking

Oefening 1 - Uitwerking

①

$$5x - 25 = 0$$

$$\Rightarrow 5x = 25$$

$$\Rightarrow x = \frac{25}{5}$$

$$\Rightarrow x = 5$$

②

$$7x + 50 = 1$$

$$\Rightarrow 7x = 1 - 50$$

$$\Rightarrow x = \frac{-49}{7}$$

$$\Rightarrow x = -7$$

③

$$3x - 24 = 5x + 26$$

$$\Rightarrow 3x - 5x = 26 - (-24)$$

$$\Rightarrow -2x = 50$$

$$\Rightarrow x = -25$$

④

$$27 + 3x = -5x + 7$$

$$\Rightarrow 8x = -20$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

⑤

$$(3x - 2) + 2(2x - 5) = 4(x - 7) - 2(x - 8)$$

$$\Rightarrow 3x - 2 + 4x - 10 = 4x - 28 - 2x + 16$$

$$\Rightarrow 7x - 12 = 2x - 12$$

$$\Rightarrow 5x = 0 \Rightarrow x = 0$$

6

$$2x + 15 = 2(x - 3)$$

$$\Rightarrow 2x + 15 = 2x - 6$$

$$\Rightarrow 0x = -21,$$

geen oplossingen voor deze uitdrukking

7

$$5x + 5(x - 4) = 10(x - 2)$$

$$\Rightarrow 10x - 20 = 10x - 20$$

$$\Rightarrow 0x = 0,$$

alle $x \in \mathbb{R}$

8

$$(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 7(x - 6)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 7x - 42$$

$$\Rightarrow 4x - 7x = -42$$

$$\Rightarrow x = -14$$

9

$$4(x + 1)^2 = (2x + 3)^2 - 7(x + 1)$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 4x^2 + 12x + 9 - 7x - 7$$

$$\Rightarrow 8x + 4 = 5x + 2$$

$$\Rightarrow 3x = -2$$

$$\Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

10

$$(y + 1)x + (y - 1)^2 = 5$$

$$\Rightarrow (y + 1)x = 5 - (y - 1)^2;$$

$$y \neq -1 \Rightarrow x = \frac{-y^2 + 2y + 4}{y + 1},$$

$$y = -1 \Rightarrow 0x = 1$$

$\Rightarrow$ geen oplossingen

Theorie

OK

Opl

Oefening 2 - Uitwerking

① $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $1x^2 + (-3)x + 2 = 0$
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$
 $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$
 $x = 1, \quad x = 2$

② $x^2 = 4(x - 1)$
 $1x^2 + (-4)x + 4 = 0$
 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$
 $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$
 $x = 2$

③ $2x^2 + x - 1 = 0$
 $2x^2 + 1x + (-1) = 0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2}$
 $x = -1, \quad x = \frac{1}{2}$

④ $10x^2 + 3x - 1 = 0$
 $D = 3^2 + 40 = 49$
 $x = \frac{-3 \pm 7}{20}$
 $x = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{5}$

⑤ $x^2 + x = -2$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

$$D = 1 - 8 = -7 < 0$$

geen oplossingen

⑥

$$2x + 15 = 2(x - 3)$$

$$2x - 2x + 15 + 6 = 0$$

$$21 = 0$$

geen oplossingen

⑦

$$(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 7(x - 6)$$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 7x - 42$$

$$2x^2 - 7x + 44 = 0$$

$$D = 49 - 352 < 0$$

geen oplossingen

⑧

$$4(x + 1)^2 + (2x + 3)^2 - 7(x + 1) = 0$$

$$8x^2 + 13x + 6 = 0$$

$$D = 169 - 192 < 0$$

geen oplossingen

⑨

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = 0 \quad x = -2y$$

$$D = 16y^2 - 16y^2 = 0$$

$$x = \frac{-4y}{2} = -2y$$

⑩

$$yx^2 + 4x = 5$$

$$y = 0 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$y \neq 0 \Rightarrow yx^2 + 4x - 5 = 0$$

$$D = 16 + 20y$$

$$D > 0 \Rightarrow y > -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20y}}{2y}$$

$$D = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4}{2 \pm \frac{4}{5}} = \frac{5}{2}$$

$$D < 0 \Rightarrow y < -\frac{4}{5}$$

$\Rightarrow$ geen oplossingen

Theorie

OK

Opl

Stelsels - Opgaven

Oefening 1 - Opgave



Los de volgende stelsels op:

$$\textcircled{1} \begin{cases} 5x & = 10 \\ 3y & = 12 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x + y & = 7 \\ 3y & = 12 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 2x & = 12 \\ 3x + 2y & = 12 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x + y & = 7 \\ x - y & = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} 2x + y & = 7 \\ x + 2y & = 8 \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \begin{cases} 2x + y & = 7 \\ x - 2y & = -9 \end{cases}$$

$$\textcircled{7} \begin{cases} 3x + 2y & = 7 \\ 2x - 3y & = -4 \end{cases}$$

$$\textcircled{8} \begin{cases} 3x & = 3y + 12 \\ 2x & = 4y - 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{9} \quad \begin{cases} 3(x+y) &= 4(x-y) - 9 \\ 2(x-y) &= 4x + 3y + 1 \end{cases}$$

Theorie

Opl

Oefening 2 - Opgave



Los de volgende stelsels op:

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} 5x & & = 10 \\ & 3y & = 12 \\ & & 6z = 18 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} x + y + 4z = 25 \\ 2x + 3y & = 12 \\ 3x & = 9 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 4 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \quad \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 16 \\ 3x + 4y + 2z = 19 \\ 4x + 2y + 3z = 19 \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \quad \begin{cases} 2(x+y) + 3(y+z) = 4x + 3y + 3 \\ 2(y+z) + 3(z+x) = 4y + 2z + 4 \\ 2(z+x) + 3(x+y) = 4z + 4x + 2 \end{cases}$$

Theorie

Opl

Oefening 3 - Opgave



Los de volgende stelsels op:

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 4x + 4y = 12 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + 2y + 3z = 50 \\ 2x + 3y + 4z = 70 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + 2y + 2z = 12 \\ 2x + 3y + 3z = 8 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \quad \begin{cases} 2x = 4 \\ 2x + 3y = 1 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \begin{cases} 2x = 4 \\ 2x + 3y = 1 \\ 2x + 9y = -5 \end{cases}$$

Theorie

Opl

Oefening 4 - Opgave



Een rechthoek heeft een omtrek van 30 meter. De lengte van de rechthoek is vier maal groter dan de hoogte. Bepaal de afmetingen van de rechthoek.

Theorie

Opl

Oefening 5 - Opgave



Arnaud, Bernard en Christophe hebben samen 200 euro spaargeld. Arnaud en Bernard hebben samen 160 euro, en Bernard heeft 20 euro meer dan Christophe. Hoeveel spaargeld heeft elk van de drie?

Theorie

Opl

Stelsels - Oplossing

Oefening 1 - Oplossing

- ➊ $x = 2, \quad y = 4$
- ➋ $x = 3, \quad y = 4$
- ➌ $x = 6, \quad y = -3$
- ➍ $x = 4, \quad y = 3$
- ➎ $x = 2, \quad y = 3$
- ➏ $x = 1, \quad y = 5$
- ➐ $x = 1, \quad y = 2$
- ➑ $x = 9, \quad y = 5$
- ➒ $x = 2, \quad y = -1$

Theorie

OK

Detail

Oefening 2 - Oplossing

- ① $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 3$
- ② $x = 3, \quad y = 2, \quad z = 5$
- ③ $x = 5, \quad y = -1, \quad z = -2$
- ④ $x = 1, \quad y = 3, \quad z = -3$
- ⑤ $x = 3, \quad y = 2, \quad z = 1$
- ⑥ $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1$

Theorie

OK

Detail

Oefening 3 - Oplossing

- ① $x = A, \quad y = 3 - A$
- ② $x = -10 + A, \quad y = 30 - 2A, \quad z = A$
- ③ geen oplossingen
- ④ geen oplossingen
- ⑤ $x = 2, \quad y = -1$

Theorie

OK

Detail

Oefening 4 - Oplossing

$$L = 12, \quad H = 3$$

Theorie

OK

Detail

Oefening 5 - Oplossing

Arnaud heeft 100 euro, Bernard 60 en Christophe 40.

Theorie

OK

Detail

Stelsels - Uitwerking

Oefening 1 - Uitwerking

❶ De eerste vergelijking bevat enkel de onbekende x . Door deze vergelijking op te lossen vinden we onmiddellijk dat $x = 2$. Uit de tweede vergelijking volgt op dezelfde manier dat $y = 4$.

❷ De tweede vergelijking levert ons onmiddellijk dat $y = 4$. Als we deze waarde invullen in de eerste vergelijking (substitutiemethode) zien we dat

$$x + 4 = 7$$

en bijgevolg is $x = 3$.

❸ Uit de eerste vergelijking volgt dat $x = 6$. Deze waarde invullen in de tweede vergelijking levert dan dat

$$18 + 2y = 12,$$

waaruit we afleiden dat $y = -3$.

❹ Als we de tweede vergelijking bij de eerste optellen, en de eerste vergelijking van de tweede aftrekken, vinden we een equivalent stelsel,

$$2x = 8, \quad -2y = -6$$

waaruit we besluiten dat $x = 4$ en $y = 3$.

❺ Als we van de eerste vergelijking tweemaal de tweede aftrekken, en van de tweede tweemaal de eerste aftrekken, bekommen we het equivalente stelsel

$$-3y = -9 \quad -3x = -6$$

en we besluiten dat $x = 2$ en $y = 3$.

⑥ Van de eerste vergelijking tweemaal de tweede aftrekken, en bij de tweede vergelijking het dubbel van de eerste bijtellen levert

$$5y = 25 \quad 5x = 5$$

en bijgevolg is de oplossing van het stelsel gegeven door $x = 1$ en $y = 5$.

⑦ We nemen het dubbel van de eerste vergelijking en trekken daar driemaal de tweede af. Anderzijds nemen we het dubbel van de tweede vergelijking en tellen daar driemaal de eerste bij op. Dit levert het stelsel

$$13x = 13 \quad 13y = 26$$

en dus is $x = 1$ en $y = 2$.

⑧ De tweede vergelijking levert ons dat $x = 2y - 1$. Invullen van deze waarde in de eerste vergelijking geeft dan

$$6y - 3 = 3y + 12,$$

waaruit we onmiddellijk afleiden dat $y = 5$. Bijgevolg wordt x gegeven door $x = 2 \cdot 5 - 1 = 9$.

⑨ Door gebruik te maken van de rekenregels uit de vorige hoofdstukken kunnen dit stelsel schrijven in de vorm

$$-x + 7y = -9 \quad -2x - 5y = 1.$$

We trekken van de tweede vergelijking het dubbel van de eerste af en vinden het stelsel

$$-x + 7y = -9 \quad -19y = 19.$$

We besluiten uit de tweede vergelijking dat $y = -1$, en deze waarde invullen in de eerste vergelijking levert

$$-x - 7 = -9,$$

en dus is $x = 2$.

Theorie

OK

Opl

Oefening 2 - Uitwerking

① Uit de eerste vergelijking volgt onmiddellijk dat $x = 2$, uit de tweede vergelijking leiden we af dat $y = 4$, en de derde vergelijking toont ons dat $z = 3$.

② Uit de derde vergelijking leiden we af dat $x = 3$. Deze waarde invullen in de tweede vergelijking toont dan dat

$$6 + 3y = 12,$$

en bijgevolg is $y = 2$. Wanneer we beide waarden invullen in de eerste vergelijking zien we dat

$$3 + 2 + 4z = 25,$$

en we besluiten dat $z = 5$.

③ We trekken de tweede vergelijking van de eerste af, tellen de derde bij de tweede op, en trekken de eerste vergelijking van de derde af. Dit levert het equivalente stelsel

$$2y = -2, \quad 2x = 10, \quad -2z = 4,$$

waaruit we afleiden dat

$$x = 5, \quad y = -1, \quad z = -2.$$

④ We trekken de tweede vergelijking van de eerste en de derde af, en trekken de eerste en de derde vergelijking af van het drievoud van de tweede. We bekomen dan het stelsel

$$\begin{cases} y & = & 3 \\ & z & = & -3 \\ x & & = & 1, \end{cases}$$

en de oplossing is bijgevolg

$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = -3.$$

5 We trekken de derde vergelijking af van het dubbel van de eerste, en drie keer de derde van 4 keer de tweede vergelijking. Dit levert het equivalente stelsel

$$\begin{cases} 4y + 5z = 13 \\ 10y - z = 19 \\ 4x + 2y + 3z = 19. \end{cases}$$

Vervolgens tellen we 5 keer de tweede vergelijking bij de eerste op, en we bekomen

$$\begin{cases} 54y = 108 \\ 10y - z = 19 \\ 4x + 2y + 3z = 19. \end{cases}$$

Uit de eerste vergelijking volgt nu dat $y = 2$, invullen in de tweede vergelijking levert $z = 20 - 19 = 1$, en de laatste vergelijking toont ons dan dat

$$4x + 4 + 3 = 19,$$

waaruit we afleiden dat $x = 3$.

6 We herleiden het stelsel eerst, met behulp van de rekenregels uit de algebra, tot de vorm

$$\begin{cases} -2x + 2y + 3z = 3 \\ 3x - 2y + 3z = 4 \\ x + 3y - 2z = 2. \end{cases}$$

Uit de laatste vergelijking halen we $x = 2 - 3y + 2z$, en invullen in de andere vergelijkingen levert dan

$$\begin{cases} 8y - z = 7 \\ -11y + 9z = -2 \end{cases}$$

Uit de eerste vergelijking leiden we af dat $z = 8y - 7$, en de laatste vergelijking wordt dan $61y = 61$, waaruit we afleiden dat $y = 1$. Invullen in de andere uitdrukkingen levert dan $z = 8 - 7 = 1$ en $x = 2 - 3 + 2 = 1$. De oplossing is dus

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1.$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 3 - Uitwerking

① We trekken van de tweede vergelijking vier keer de eerste af, en we bekomen het equivalente stelsel

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 0x + 0y = 0. \end{cases}$$

De tweede vergelijking is bijgevolg overtollig, en alle oplossingen worden gekenmerkt door de vergelijking

$$x + y = 3.$$

We kunnen $x = A$ dan vrij kiezen, en de waarde van y wordt gegeven door

$$y = 3 - x = 3 - A.$$

② We trekken de eerste vergelijking af van de tweede, en twee keer van de derde, waardoor we het volgende equivalente stelsel bekomen:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ y + 2z = 30 \\ y + 2z = 30. \end{cases}$$

Als we nu de derde vergelijking van de tweede aftrekken, bekomen we

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ y + 2z = 30 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

De laatste vergelijking is dus overtollig, en kan uit het stelsel geëlimineerd worden. De tweede vergelijking toont ons dat $y = 30 - 2z$, en deze waarde invullen in de eerste vergelijking en oplossen naar x levert ons

$$y = 30 - 2z, \quad x = 20 - (30 - 2z) - z = -10 + z.$$

Wanneer we voor z een willekeurig waarde A kiezen, kunnen we besluiten dat de oplossing van het stelsel gegeven wordt door

$$x = -10 + A, \quad y = 30 - 2A, \quad z = A.$$

3 We trekken de eerste vergelijking van de tweede af, en trekken twee keer de eerste vergelijking van de derde af. We vinden dan

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ y + z = -8 \\ y + z = -32. \end{cases}$$

De tweede vergelijking van de derde aftrekken levert dan

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ y + z = -8 \\ 0 = -24. \end{cases}$$

waaruit we besluiten dat de vergelijkingen tegenstrijdig zijn, en dat er bijgevolg geen oplossingen voor dit stelsel bestaan.

4 Uit de eerste vergelijking kunnen we besluiten dat $x = 2$, uit de tweede vergelijking vinden we dan dat $3y = 1 - 4 = -3$, en bijgevolg moet $y = -1$. Deze waarden zijn echter in tegenspraak met de laatste vergelijking, omdat

$$2x + y = 4 - 1 = 3 \neq 6.$$

Dit stelsel heeft daarom geen oplossingen.

5 Uit de eerste vergelijking volgt dat $x = 2$, uit de tweede vergelijking besluiten we dat $y = -1$. Invullen van deze waarden in de derde vergelijking levert ons

$$2x + 9y = 4 - 9 = -5,$$

en bijgevolg voldoet de gevonden oplossing ook aan de derde vergelijking (die we dus kunnen elimineren uit het stelsel). De oplossing wordt bijgevolg gegeven door

$$x = 2, \quad y = -1.$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 4 - Uitwerking

Stellen we de lengte en de breedte van de rechthoek voor met L en H . De gegevens leveren ons dan het volgend stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2(L + H) &= 30 \\ L &= 4H \end{cases}$$

We kunnen dit stelsel oplossen met behulp van de substitutiemethode. Uit de tweede vergelijking leiden we af dat

$$L = 4H.$$

Invullen in de eerste vergelijking levert dan

$$2(4H + H) = 30,$$

waaruit we besluiten dat

$$H = 3, \quad L = 4H = 12.$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 5 - Uitwerking

Stellen we het spaargeld van elk van de drie voor met A , B en C . De gegevens leveren ons dan het volgend stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} A + B + C &= 200 \\ A + B &= 160 \\ B &= C + 20 \end{cases}$$

Door de tweede vergelijking van de eerste af te trekken vinden we dat

$$C = 200 - 160 = 40.$$

Invullen in de derde vergelijking levert dan

$$B = 40 + 20 = 60.$$

Invullen in de tweede vergelijking toont ons dan dat

$$A + 60 = 160,$$

en we besluiten dat

$$A = 100.$$

Theorie

OK

Opl

Functies - Opgaven

Oefening 1 - Opgave



Bepaal het beeld van de waarden -2 , -1 , 0 , 1 en 2 onder de functie

$$f(x) = x^3 - 4x + 2.$$

Bepaal eveneens het domein van de functie, en maak een grafische voorstelling van de functie.

Theorie

Opl

Oefening 2 - Opgave



Bepaal het beeld van de waarden -2 , -1 , 0 , 1 en 2 onder de functie

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Bepaal eveneens het domein van de functie, en maak een grafische voorstelling van de functie.

Theorie

Opl

Oefening 3 - Opgave



Bepaal het beeld van de waarden -2 , 0 , $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{2}$ onder de functie

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Bepaal eveneens het domein van de functie.

Theorie

Opl

Oefening 4 - Opgave



Maak een grafische voorstelling van de volgende lineaire (en constante) functies. Bepaal de richtingscoëfficiënt en het snijpunt van de grafiek met beide assen.

- ➊ $y = x$
- ➋ $y = 2x + 1$
- ➌ $y = -x + 4$
- ➍ $y = -3x + 2$
- ➎ $y = 3$

Theorie

Opl

Oefening 5 - Opgave



Bepaal de lineaire functie waarvan de grafiek door de gegeven punten loopt.

- ➊ $(0, 0) \text{ en } (2, 2)$
- ➋ $(0, 0) \text{ en } (2, 6)$
- ➌ $(0, 3) \text{ en } (2, 0)$
- ➍ $(1, 2) \text{ en } (3, 4)$
- ➎ $(1, 5) \text{ en } (3, -8)$
- ➏ $(1, 5) \text{ en } (5, 5)$

Theorie

Opl

Oefening 6 - Opgave



Het waterpeil in een bassin is om 16.00u gelijk aan 5m, om 16u15 is het peil gelijk aan 5,20m. Bepaal het waterpeil om 16u05 en om 16u07, gebruik makend van lineaire interpolatie.

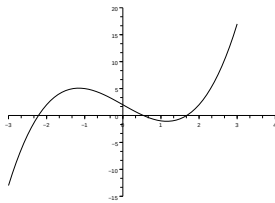
Theorie

Opl

Functies - Oplossing

Oefening 1 - Oplossing

$$f(-2) = 2, \quad f(-1) = 5, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = -1, \quad f(2) = 2$$
$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$$



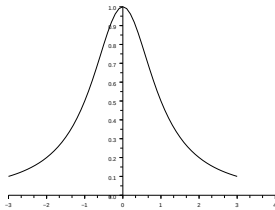
Theorie

OK

Detail

Oefening 2 - Oplossing

$$f(-2) = \frac{1}{5}, \quad f(-1) = \frac{1}{2}, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(2) = \frac{1}{5}$$
$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$$



Theorie

OK

Detail

Oefening 3 - Oplossing

$$f(-2) = \frac{1}{3}, \quad f(0) = -1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{5}$$
$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

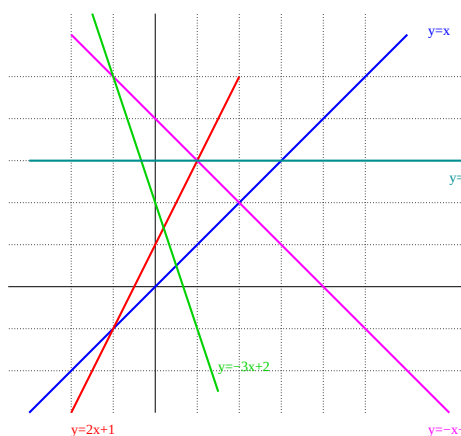
Theorie

OK

Detail

Oefening 4 - Oplossing

- ❶ De rechte bevat de punten $(-3, -3)$ en $(3, 3)$. Richtingscoëfficiënt is 1, snijpunt met beide assen in $(0, 0)$.
- ❷ De rechte bevat de punten $(-2, -3)$ en $(2, 5)$. Richtingscoëfficiënt is 2, snijpunten met de assen in $(0, 1)$ en $(-\frac{1}{2}, 0)$.
- ❸ De rechte bevat de punten $(0, 4)$ en $(4, 0)$. Richtingscoëfficiënt is -1 , snijpunten met de assen in $(0, 4)$ en $(4, 0)$.
- ❹ De rechte bevat de punten $(-1, 5)$ en $(1, -1)$. Richtingscoëfficiënt is -3 , snijpunten met de assen in $(0, 2)$ en $(\frac{2}{3}, 0)$.
- ❺ De rechte bevat de punten $(-3, 3)$ en $(3, 3)$. Richtingscoëfficiënt is 0, de rechte is horizontaal. Snijpunt met de y -as in $(0, 3)$, geen snijpunt met de x -as.



Theorie

OK

Detail

Oefening 5 - Oplossing

- ① $y = x$
- ② $y = 3x$
- ③ $y = -\frac{2}{3}x + 2$
- ④ $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$
- ⑤ $y = -\frac{13}{2}x + \frac{23}{5}$
- ⑥ $y = 5$

Theorie

OK

Detail

Oefening 6 - Oplossing

Om 16u05 is het waterpeil 5,12 meter,
om 16u07 is het 5,156 meter.

Theorie

OK

Detail

Functies - Uitwerking

Oefening 1 - Uitwerking

Een eenvoudige berekening toont dat

$$f(-2) = (-2)^3 - 4(-2) + 2 = 2,$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1) + 2 = 5,$$

$$f(0) = (0)^3 - 4(0) + 2 = 2,$$

$$f(1) = (1)^3 - 4(1) + 2 = -1,$$

$$f(2) = (2)^3 - 4(2) + 2 = 2$$

Omdat we voor elke waarde $x \in \mathbb{R}$ de functiewaarde $x^3 - 4x + 2$ kunnen berekenen, is

$$\text{dom } f = \mathbb{R}.$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 2 - Uitwerking

Eenvoudige berekening toont dat

$$f(-2) = \frac{1}{(-2)^2 + 1} = \frac{1}{5} = 0.2,$$

$$f(-1) = \frac{1}{(-1)^2 + 1} = \frac{1}{2} = 0.5,$$

$$f(0) = \frac{1}{0^2 + 1} = 1,$$

$$f(1) = \frac{1}{(1)^2 + 1} = \frac{1}{2} = 0.5,$$

$$f(2) = \frac{1}{(2)^2 + 1} = \frac{1}{5} = 0.2,$$

Omdat we voor elke waarde $x \in \mathbb{R}$ de functiewaarde $\frac{1}{x^2+1}$ kunnen berekenen, is

$$\text{dom } f = \mathbb{R}.$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 3 - Uitwerking

Eenvoudige berekening toont dat

$$\begin{aligned}f(-2) &= \frac{1}{(-2)^2 - 1} = \frac{1}{3}, \\f(0) &= \frac{1}{(0)^2 - 1} = -1, \\f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}, \\f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

Omdat we de functiewaarde $\frac{1}{x^2-1}$ kunnen berekenen voor alle waarden van x behalve -1 en 1 , besluiten we dat

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Theorie

OK

Opl

Oefening 4 - Uitwerking

Theorie

OK

Opl

Oefening 5 - Uitwerking

Theorie

OK

Opl

Oefening 6 - Uitwerking

Volgens de formule voor lineaire interpolatie wordt het waterpeil om 16u05 gegeven door

$$5.03 + \frac{5.30 - 5.03}{16 : 15 - 16 : 00}(16 : 05 - 16 : 00) = 5.12,$$

terwijl het voor 16u07 gegeven wordt door

$$5.03 + \frac{5.30 - 5.03}{16 : 15 - 16 : 00}(16 : 07 - 16 : 00) = 5.156.$$

Als het waterpeil in 15 minuten stijgt met 27 centimeter, stijgt het met 1,8 centimeter per minuut. Op 5 minuten stemt dit overeen met een stijging van 9 centimeter, op 7 minuten hebben we een stijging met 12,6 centimeter. Als we deze stijgingen bijtellen bij het beginpeil van 5,03 meter, vinden we het gewenste resultaat.

Theorie

OK

Opl