Antwerp Maritime Academy

Mathématiques

Cours de rattrapage

P. Bueken, J. Joos, D. Luyckx, K. Verhasselt

19 février 2025

Légende

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

$\Uparrow$

Exercices

Théorie

Sol

OK

Détail

Hints :

Table des matières

1 L'arithmétique **3**

2 Algèbre élémentaire **9**

3 Polynômes **16**

4 Résolution d'équations **29**

5 Résolution de systèmes d'équations **34**

6 Fonctions d'une variable réelle **41**

Arithmétique - Exercices **55**

Algèbre - Exercices **76**

Polynômes - Exercices **121**

Equations - Exercices **171**

Systèmes - Exercices **180**

Fonctions - Exercices **199**

Chapitre 1

L'arithmétique

Le sujet de l'arithmétique est l'étude des nombres, et du calcul. A cet effet, on introduit d'abord l'ensemble des nombres réels, qu'on dénote par $\mathbb{R}$. Cet ensemble contient les nombres *rationnels*, qui sont des nombres qu'on sait écrire comme une fraction ou un quotient de deux nombres entiers, et les nombres *irrationnels*, qui sont des nombres dont l'expression décimale ne présente aucune répétition (comme le nombre $\pi = 3,1415\ldots$). Dans cet ensemble de nombres réels, on étudie une série d'opérations assez importantes.

1.1 Addition et somme

On peut additionner deux nombres réels, et cette opération nous donne un troisième nombre réel, appelé la somme de ces nombres. Quelques exemples de sommes sont

$$5,71 + 3,228 = 8,938, \quad 312,5 + 105,7 = 418,2.$$

La somme est une opération commutative et associative, impliquant que l'ordre dans lequel on exécute l'addition de plusieurs nombres n'influence pas le résultat final.

$5,7+3,2 = 8,9 = 3,2+5,7, \quad 1+2+3 = 1+5 = 6, \quad 1+2+3 = 3+3 = 6.$

1.2 Soustraction et différence

On peut également soustraire un nombre réel d'un autre, pour obtenir un troisiḿe nombre réel qu'on appelle la différence.

$$5,71 - 2,3 = 3,41, \quad 5 - 7 = -2.$$

L'ordre dans lequel on exécute des soustractions est important pour le résultat final. Dans une formule contenant plusieurs soustractions, on sera donc obligé de fixer l'ordre dans lequel on fait les calculs. L'interprétation standard est de toujours lire et exécuter les calculs de gauche à droite, donc

$$5 - 2 - 1 = 3 - 1 = 2.$$

1.3 Multiplication et produit

Deux nombres réels peuvent être multipliés, le résultat de cette opération est un nombre réel qu'on appelle le produit des nombres réels. La multiplication sera parfois dénotée par $\times$, mais la notation la plus fréquemment utilisée est un point, $\cdot$.

$$12 \times 6 = 72, \qquad 12,3 \cdot 4,1 = 50,43.$$

Comme l'addition, la multiplication est une opération commutative et associative, l'ordre dans lequel on exécute des multiplications n'influence donc pas le résultat final.

$$4 \cdot 5 \cdot 6 = 4 \cdot 30 = 120, \qquad 4 \cdot 5 \cdot 6 = 20 \cdot 6 = 120, \qquad -4,1 \cdot 5,2 = -21,32.$$

On remarque que le produit de deux nombres positifs ou négatifs est un nombre positif, et que le produit d'un nombre positif avec un nombre négatif est un nombre négatif.

1.4 Division et quotient, fractions

La division de deux nombres réels est l'opération inverse de la multiplication. Le résultat de la division est appelé le quotient, On dénote parfois la division par le signe :, le plus souvent on écrit /.

$$120 : 4 = 30, \text{ parce que } 4 \times 30 = 120, \qquad 130/17 = 7,647\ldots$$

On écrit le quotient souvent sous forme d'une fraction, par exemple

$$130 : 17 = 130/17 = \frac{130}{17}.$$

L'ordre dans lequel on exécute des divisions consécutives influence le résultat final, parce que la division n'est pas commutative ni associative, et pour cette raison on accepte comme règle de toujours lire et calculer des divisions de gauche à droite,

$$120/4/3 = 30/3 = 10.$$

1.5 Opérations avec des fractions

Une fraction peut être simplifiée ou écrite sous une autre forme en multipliant ou en divisant le numérateur et le dénominateur de la fraction par un nombre arbitraire (différent de zéro)

$$\frac{12}{28} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{3}{7}, \qquad \frac{9}{24} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{3}{8}.$$

Afin de calculer la somme ou la différence de deux fractions dont les dénominateurs sont identiques, il suffit de calculer la somme des numérateurs,

$$\frac{2}{13} + \frac{7}{13} = \frac{9}{13}, \qquad \frac{5}{13} - \frac{7}{13} = \frac{-2}{13} = -\frac{2}{13}.$$

Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on multiplie d'abord les numérateurs et dénominateurs des fractions par des facteurs spécifiques, d'une telle façon que les fractions (équivalentes) qui en résultent ont le même dénominateur :

$$\frac{7}{15} + \frac{8}{12} = \frac{28}{60} + \frac{40}{60} = \frac{68}{60} = \frac{17}{15}, \qquad \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Le produit de deux fractions est obtenue en multipliant les numérateurs et les dénominateurs séparément,

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{13} = \frac{7 \cdot 6}{10 \cdot 13} = \frac{42}{130} = \frac{21}{65},$$

et on construit l'inverse d'une fraction en échangeant le numérateur et le dénominateur. Pour diviser un nombre par un e fraction, il suffit de multiplier le nombre avec l'inverse de la fraction, et par conséquent,

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}.$$

1.6 Puissances

Pour le calcul d'une puissance, on multiplie un nombre réel, le *nombre de base*, avec soi-même un nombre de fois. Le nombre de facteurs dans ce produit est indiqué par l'*exposant*, qu'on dénote par un index supérieur.
Si on prend 5 comme nombre de base et 3 comme exposant, la puissance 3 de 5 (le cube de 5, ou 5 puissance 3) est donnée par

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125,$$

et de la même façon,

$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49, \quad 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243.$$

Dans le cas spécial où l'exposant est 2, la puissance 2 d'un nombre réel est également appelé le *carré* du nombre, dans le cas de puissance 3 on parle du *cube* du nombre réel.
On peut calculer la puissance d'un produit ou d'un qoutient en mettant les facteurs à cette puissance,

$$15^2 = (5 \cdot 3)^2 = 5^2 \cdot 3^2 = 25 \cdot 9 = 225, \qquad \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{5^2}{8^2} = \frac{25}{64}.$$

1.7 Racines

Calculer la racine d'un nombre est l'opération inverse du calcul d'une puissance.
La *racine carrée* d'un nombre est un nombre (positif) dont le carré est égal au nombre donné, par exemple,

$$\sqrt{16} = 4, \quad \text{parce que} \quad 4^2 = 16.$$

De la même façon, la *racine cubique* d'un nombre est le nombre dont le cube correspond au nombre donné,

$$\sqrt[3]{125} = 5, \text{ parce que } 5^3 = 125, \qquad \sqrt[3]{-8} = -2.$$

Cette définition peut directement être généralisée, et on voit que

$$\sqrt[5]{32} = 2.$$

La racine d'un nombre réel n'est pas toujours défini. Par exemple, le carré (ou n'importe quelle puissance paire) d'un nombre réel est toujours positif, impliquant qu'il est impossible de tirer une racine carrée ou une racine d'ordre 4 d'un nombre négatif.
Pour un nombre (strictement) positif, par contre, on peut toujours trouver deux nombres réels dont le carré (ou une autre puissance paire) donne le nombre donné. On constate, par exemple, que

$$4^2 = 16, \qquad (-4)^2 = 16,$$

impliquant qu'on trouve un nombre positif et un nombre négatif qui peuvent être considèrès comme la racine carrée. Dans ces cas, le nombre positif sera considéré comme la racine carrée.
La racine d'une fraction peut être calculée en tirant la racine du numérateur et du dénominateur, par exemple,

$$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}.$$

Il est également clair que la rcine d'un produit correspond au produit des racines des facteurs,

$$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6, \qquad \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

1.8 Règles de priorité

En résolvant des problèmes pratiques, on rencontre souvent des situations dans lesquels plusieurs opérations (différentes) doivent être effectués dans un ordre préscrit. Pour éviter la confusion, il est important de fixer une règle de priorité qui nous permet de determiner l'ordre dans lequel les calculs exprimés dans une formule doivent être effectués. La règle traditionnelle nous dit de d'abord calculer les puissances et les racines, ensuite les multiplications et les divisions, et finalement les sommes et les différences. Si on veut changer cet ordre, on le fait en mettant des paranthèses autour des opérations qu'on veut effectuer en premier lieu.
Par conséquent, on voit que

$$4+3\cdot5-4^3/2^2 = 4+15-64/4 = 4+15-16 = 3, \qquad (4+3)\cdot5-4/2 = 35-2 = 33.$$

1.9 Usage de la calculatrice

Souvent, dans des calculs compliqués, on utilise des calculatrices. La plupart des calculatrices modernes connaît et respecte les règles de priorite, mais certaines machines, souvent des machines un peu plus anciennes ou moins sophistiquées, ne sont pas munies de cette intelligence, ou utilisent leurs propres règles de priorité. Dans ce cas, il ne suffit pas d'entrer les nombres et les opérations comme indiqué par la formule. Consultez toujours le manuel d'utilisateur de votre calculatrice avant d'effectuer de tels calculs. Si vous doutez, faites le calcul en quelques étapes, tout en tenant compte de l'ordre prévu des opérations, ou utilisez les parenthèses qui seront, sans doute, prévues sur votre calculatrice.

⇐ ⇑ ⇒ Exercices

Chapitre 2

Algèbre élémentaire

⇐ ⇑ ⇒ Exercices

Il est parfois difficile ou impossible de représenter un nombre réel en chiffres (notation décimale). Il vaut alors mieux de représenter ce nombre à l'aide d'un symbole. Ceci est le cas, par exemple, pour le nombre réel $\pi = 3,1415\ldots$, le nombre $e = 2,78\ldots$ et la racine carrée de 2, $\sqrt{2} = 1,4\ldots$. Les symboles qui représentent des nombres (fixes), seront appelés des *constantes*.
Parfois, il est également intéressant de ne pas devoir connaître la valeur d'un nombre avant de faire un calcul. Il devient alors possible d'insérer dans le résultat la valeur exacte du nombre, ou de faire le calcul pour toutes les valeurs possibles que le paramètre peut prendre. Dans ces cas, on représentera de nouveau le nombre par un symbole, appelé une *variable*, ou un *inconnu*. On sait, par exemple, que la circonférence d'un cercle est donnée par le produit de π (une constante) et le diamétre (deux fois le rayon) du cercle,

$$\text{Circ} = 2 \cdot \pi \cdot \text{Rayon}.$$

Pour exprimer que l'age d'une personne A est le double de celle de personne B on utilise la formule

$$A = 2 \cdot B,$$

et le volume V d'un cube dont le côté mesure Z est donné par

$$V = Z^3.$$

Dans ce chapitre sur l'algèbre élémentaire on étudie un nombre de techniques permettant le traitement de ce genre de formules. Ces techniques seront dérivées d'un nombre (assez limité) de règles de calcul, qui sont valables indépendamment des nombres qu'on y insère.

2.1 Somme et différence, produit et quotient

On sait déjà que la somme de nombres réels est *commutative* et *associative*, c'est-à-dire que, pour des nombres réels arbitraires $a, b, c \in \mathbb{R}$, il tient que

$$a + b = b + a, \qquad (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c.$$

Ceci implique que l'ordre dans lequel les nombres sont additionnés n'est pas important pour le résultat final. Le nombre 0 est le seul élément neutre pour l'addition,

$$a + 0 = a,$$

et chaque nombre $a \in \mathbb{R}$ a un nombre opposé (unique), $-a$, tel que

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a.$$

Le nombre opposé d'une somme est la somme des opposés des termes,

$$-(a + b) = (-a) + (-b).$$

La différence de deux nombres peut être considérée comme une somme d'un nombre et l'opposé d'un deuxième nombre,

$$a - b = a + (-b).$$

Le produit de deux nombres réels (indiqué comme $a \cdot b$ ou, s'il est possible, par ab) est commutative et associative, impliquant que, pour des nombres réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a

$$a \cdot b = b \cdot a, \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c,$$

et on conclut que l'ordre dans lequel on multiplie des nombres n'est pas important pour le résultat final. On voit que 1 est l'élément neutre pour la multiplication, et que 0 est l'unique élément absorbant,

$$a \cdot 1 = a, \qquad a \cdot 0 = 0, \qquad a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Chaque nombre réel $a \neq 0$ a un nombre inverse (multiplicatif), qu'on dénote par $\frac{1}{a}$, tel que

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

On voit que l'inverse d'un produit est égal au produit des inverses des facteurs,

$$\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}.$$

Le produit est distributif par rapport à la somme,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Cette propriété nous permet d'écrire un produit comme une somme ou, s'il est nécessaire, de mettre "en évidence" un terme qui est commun dans les termes d'une somme.
La division d'un nombre a par un nombre b (ou une fraction $\frac{a}{b}$) peut être considérée comme un produit de a avec l'inverse de b,

$$a/b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

En utilisant ces règles de calcul on peut déjà simplifier un grand nombre de formules. Les techniques les plus connues de l'arithmétique sont des conséquences directes des propriétés décrites ci-dessus.

2.2 Calculs avec des fractions

Le produit de deux fractions est calculée comme

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = a \cdot b \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{d} = a \cdot b \cdot \frac{1}{c \cdot d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}.$$

On sait que

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot b}{a \cdot b} = 1$$

d'où il suit que l'inverse de $\frac{a}{b}$ est égal à $\frac{b}{a}$,

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}.$$

On en déduit que le quotient de deux fractions peut être calculé comme

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Il est clair que, pour des valeurs quelconques de $c \in \mathbb{R}_0$,

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c},$$

et on conclut que le numérateur et le dénominateur d'une fractions peuvent toujours être multipliés ou divisés par un nombre (différent de 0) sans que la valeur de la fraction change. Ceci nous permet d'écrire des fractions sous une forme différente, plus simple, ou, s'il est nécessaire, de mettre deux fractions sur le même dénominateur.
La somme de deux fractions ayant le même dénominateur est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{c} &= a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} \\ &= (a+b) \cdot \frac{1}{c} = \frac{a+b}{c}, \end{aligned}$$

et la somme de deux fractions quelconques peut être calculée en mettant les fractions sur le même dénominateur,

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{d} &= a \cdot d \cdot \frac{1}{c \cdot d} + b \cdot c \cdot \frac{1}{c \cdot d} \\ &= (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \frac{1}{c \cdot d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{c \cdot d}. \end{aligned}$$

2.3 Puissances et racines

Pour un nombre naturel (strictement positif) n et un nombre réel $a \in \mathbb{R}$, on définit la n-ième puissance de a ("a puissance n") comme

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a, \qquad n\text{facteurs.}$$

La n-ième racine du nombre réel a, dénotée par $\sqrt[n]{a}$, est un nombre réel dont la n-ième puissance est égale à a,

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Dans les cas spéciaux où $n = 2$ et $n = 3$, les puissances sont appelés le "carré" et le "cube" du nombre réel, et on parle de la "racine carrée" et la "racine cubique".
Ik suit immédiatement des règles de calcul pour la multiplication que

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}, \qquad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n,$$

pour tous les nombres réels a, b et tous les nombres naturels (positifs) n, m.
Si on demande que ces résultats restent valables pour d'autres exposants (non-naturels), on voit immédiatement que

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0,$$

d'ou il suit que

$$a^0 = 1.$$

On conclut également que

$$a^0 = a^{1+(-1)} = a^1 \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1}$$

impliquant que a^{-1} est l'inverse de a. On utilisera souvent cette notation pour indiquer l'inverse d'un nombre réel,

$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Avec cette nouvelle notation, il suit directement que

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Plus généralement, on écrit

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

On voit ensuite que

$$(a^{1/n})^n = a^{n \cdot 1/n} = a^1 = a,$$

impliquant que

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

Plus généralement, ceci nous permet de dire que

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p},$$

une notation fréquemment utilisée pour la représentation de racines.
Avec les définitions introduites ci-dessus, on conclut que, pour des valeurs arbitraires de $a, b \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{Q}$, il tient que

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad (a^p)^q = a^{p \cdot q}, \quad (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p.$$

En choisissant des valeurs spéciales pour p et q, on déduit immédiatement quelques règles de calcul permetttant la manipulation de racines :

$$\sqrt[p]{a \cdot b} = \sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{b}, \quad \sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a}, \quad \sqrt[pq]{a^{pr}} = \sqrt[q]{a^r}.$$

On voit immédiatement que

$$\frac{a}{b}^p = (a \cdot b^{-1})^p = a^p \cdot b^{-p} = \frac{a^p}{b^p},$$

et en remplaçant p par $\frac{1}{q}$ on conclut que

$$\sqrt[q]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}}.$$

2.4 Produits remarquables

A l'aide des règles de calcul introduits ci-dessus on obtient directement les "produits remarquables" suivants :

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2x \cdot y + y^2, \\
x^2 - y^2 &= (x+y)(x-y), \\
x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \\
x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2), \\
x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2).
\end{aligned}$$

En général, on démontre que, pour chaque $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \binom{n}{0} x^n y^0 \\
&\quad + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 \\
&\quad + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \dots \\
&+ \binom{n}{n-2} x^2 y^{n-2} \\
&+ \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} \\
&+ \binom{n}{n} x^0 y^n,
\end{aligned}
$$

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés *coefficients binomiaux*. On les définit comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

où $n!$ dénote le factoriel du nombre naturel n,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \qquad 0! = 1.$$

On démontre également que, pour chaque $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + \ldots + x^1 y^{n-2} + x^0 y^{n-1}).$$

Chapitre 3

Polynômes

⇐ ⇑ ⇒ Exercices

3.1 Définition

Un polynôme (en une variable x) est une expression de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Les objets a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ sont (parfois) des nombres réels, et on les appelle les coefficients du polynôme. La puissance maximale de la variable x qui apparaît dans l'expression (c'est-à-dire n, à condition que $a_n \neq 0$), est le degré (en x) du polynôme. L'expression

$$x^5 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 8$$

est donc un polynôme de degré 5 au coefficients réels en une variable x. L'expression $4y^2 - 2y + 1$ est un polynôme de degré 2 en y, tandis que

$$x^2 + 4\sin(x)$$

n'est pas une expression polynômiale.

3.2 Somme, différence et produit de polynômes

La somme de deux polynômes en une variable x est de nouveau un polynôme en x. Il suit des règles de calculs de l'algèbre que le coefficient de x^i dans ce nouveau polynôme est la somme des coefficients de x^i dans les termes de la somme. Ainsi, la somme de

$$A = x^3 + 2x^2 + 3x + 4, \qquad B = x^3 + 4x^2 + 5x + 6$$

est égale à

$$\begin{aligned} A + B &= (x^3 + 2x^2 + 3x + 4) + (x^3 + 4x^2 + 5x + 6) \\ &= x^3 + 2x^2 + 3x + 4 + x^3 + 4x^2 + 5x + 6 \\ &= x^3 + x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 3x + 5x + 4 + 6 \\ &= (1 + 1)x^3 + (2 + 4)x^2 + (3 + 5)x + (4 + 6) \\ &= 2x^3 + 6x^2 + 8x + 10, \end{aligned}$$

et de façon similaire on déduit que

$$(x^2+2yx+y^2)+(x^3+3yx^2+3y^2x+y^3) = x^3+(1+3y)x^2+(2y+3y^2)x+(y^2+y^3).$$

L'opposé d'un polynôme est obtenu en remplaçant chaque coefficient du polynôme par son opposé, et la différence de deux polynômes est alors définie comme une somme du premier polynôme et de l'opposé du deuxième,

$$\begin{aligned} (2x^2 + 3x + 5) - (x^2 + 2x - 5) &= (2x^2 + 3x + 5) + (-x^2 - 2x + 5) \\ &= (2 - 1)x^2 + (3 - 2)x + (5 + 5) \\ &= x^2 + x + 10, \\ (x^2 - 7x + 9) - (x^2 + 2x - 5) &= (x^2 - 7x + 9) + (-x^2 - 2x + 5) \\ &= (1 - 1)x^2 + (-7 - 2)x + (9 + 5) \\ &= -9x + 14. \end{aligned}$$

Il suit des règles de l'algèbre que le produit de deux polynômes (en une variable x) est de nouveau un polynôme en x, dont le degré est égal à la somme des degrés des facteurs. Le produit des polynômes (de degré 2)

$$A = x^2 + 2x + 3, \qquad B = x^2 + 5x + 7,$$

est donné par

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (x^2 + 2x + 3) \cdot (x^2 + 5x + 7) \\ &= x^2 \cdot x^2 + 2x \cdot x^2 + 3 \cdot x^2 \\ &\quad + x^2 \cdot 5x + 2x \cdot 5x + 3 \cdot 5x \\ &\quad + x^2 \cdot 7 + 2x \cdot 7 + 3 \cdot 7 \\ &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x^3 + 10x^2 + 15x + 7x^2 + 14x + 21 \\ &= x^4 + (2+5)x^3 + (3+10+7)x^2 + (15+14)x + 21 \\ &= x^4 + 7x^3 + 20x^2 + 29x + 21. \end{aligned}$$

3.3 Division euclidienne de deux polynômes

Considérons deux polynômes arbitraires D et d, et supposons que $d \neq 0$. On peut toujours construire des polynômes Q et R tels que

$$D = Q \cdot d + R.$$

Si, en plus, on exige que le degré de R soit inférieur au degré de d, ces polynômes Q et R sont uniques.
Considérons, par exemple,

$$D = x^3 + 2x^2 + 3x + 4, \qquad d = x^2 + x + 1;$$

il est alors clair que

$$Q = x + 1, \qquad R = x + 3,$$

sont les (seuls) polynômes tels que

$$D = Q \cdot d + R,$$

le degré de R (1 dans ce cas) étant inférieur au degré de d (2 dans ce cas).
Cette construction ressemble la division d'un nombre naturel D par un autre nombre naturel d, où on construit deux nombres Q et R tels que

$$D = Q \cdot d + R,$$

avec la condition additionnelle $R < d$. On peut, par conséquent, considérer cette construction comme une division d'un polynôme D par un autre polynôme d. Le polynôme Q est appelé le quotient, le polynôme R est le reste de la division.

Afin de diviser, en pratique, un polynôme D (de degré n),

$$D = D_n x^n + D_{n-1} x^{n-1} + \ldots + D_1 x + D_0,$$

par un autre polynoôme d (de degré m),

$$d = d_m x^m + d_{m-1} x^{m-1} + \ldots + d_1 x + d_0,$$

on peut utiliser un algorithme qu'on appelle la *division euclidienne*.
On remarque d'abord que, si $n < m$, on voit immédiatement que $D = 0 \cdot d + R$, et, par conséquent

$$R = D, \qquad Q = 0.$$

Dans la suite, on suppose donc que $n \geq m$.
Supposons maintenant que le degré du polynôme Q est égal à l,

$$Q = q_l x^l + q_{l-1} x^{l-1} + \ldots + q_1 x + q_0,$$

et que le degré de R est inférieur à m (le degré de d). On peut alors construire le polynôme Q terme par terme par l'algorithme suivant.
Déterminons d'abord le coefficient q_l du premier terme de Q (puissance maximale de x). On remarque que le terme ayant le degré maximal dans l'expression $Q \cdot d + R$ est égal à

$$q_l x^l \cdot d_m x^m = q_l d_m x^{l+m}.$$

On sait que $D = Q \cdot d + R$, et on peut donc comparer les termes du plus grand degré des deux expressions (en supposant que $n \geq m$). On conclut que

$$l + m = n, \qquad q_l d_m = D_n.$$

Le degré du polynôme Q est donc égal à $n - m$, et le terme du plus grand degré de Q est donné par

$$q_{n-m} x^{n-m} = \frac{D_n}{d_m} x^{n-m}.$$

On écrit alors le polynôme Q comme

$$Q = \frac{D_n}{d_m} x^{n-m} + Q',$$

où le degré de Q' est inférieur à $n - m$. L'expression

$$D = Q \cdot d + R = q_{n-m}x^{n-m} \cdot d + Q' \cdot d + R$$

peut être formulée comme

$$D - q_{n-m}x^{n-m} \cdot d = Q' \cdot d + R.$$

et on en déduit que le polynôme Q' est le quotient de la division du polynôme

$$D' = D - q_{n-m}x^{n-m} \cdot d$$

par le polynôme d. On peut exécuter cette division à l'aide du même algorithme de division euclidienne.
L'algorithme de division euclidienne peut donc être résumé comme suit :
Etape 1 Si le degré de D est inférieur à celui de d, $n < m$, alors $Q = 0$ et $R = D$.
Etape 2 Déterminez le terme du plus grand degré de Q,

$$q_{n-m}x^{n-m} = \frac{D_n}{d_m}x^{n-m}.$$

Etape 3 Déterminez le nouveau polynôme

$$D' = D - q_{n-m}x^{n-m} \cdot d.$$

Le degré de ce polynôme est inférieur à celui de D.
Etape 4 Divisez le polynôme D' par le polynôme d (en exécutant les trois étapes ci-dessus). Le quotient Q' de cette division nous donne les termes additionnelles du polynôme Q. Le reste R de la division nous donne le reste de la division originale.
Considérons, par exemple, les deux polynômes

$$D = x^3 + 2x^2 + 3x + 4, \qquad d = x^2 + x + 1,$$

et utilisons l'algorithme de division pour la détermination des deux polynômes Q et R. On voit d'abord que le terme du plus grand degré du quotient est donné par

$$q_1 x = \frac{1}{1}x^{3-2} = x,$$

et le polynôme

$$D' = D - x \cdot d$$

prend la forme

$$(x^3 + 2x^2 + 3x + 4) - x(x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 4.$$

On utilise maintenant la même méthode pour la division de ce nouveau polynôme D' par le polynôme d, et on voit que

$$q_0 = \frac{1}{1}x^{2-2} = 1,$$

et

$$(x^2 + 2x + 4) - 1 \cdot (x^2 + x + 1) = x + 3.$$

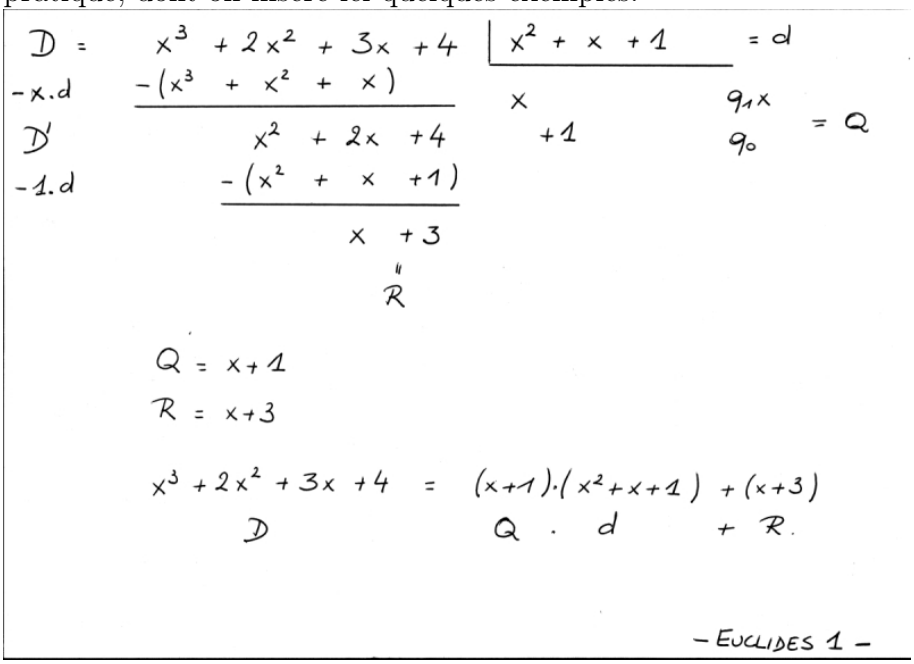
Ce dernier polynôme a un degré inférieur à 2, et on conclut que

$$Q = q_1 x + q_0 = x + 1, \qquad R = x + 3.$$

Par conséquent,

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = (x + 1) \cdot (x^2 + x + 1) + (x + 3).$$

Le plus souvent, on exécute la technique décrite ci-dessus à l'aide d'un schéma pratique, dont on insère ici quelques exemples.



$$
\begin{array}{lrl}
D = & x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 8x + 5 & \quad \big| \; x^2 + 2x - 1 = d \\
-x^2 d & -(x^4 + 2x^3 - x^2) & \quad x^2 \qquad q_2 x^2 \\
D' & 5x^3 + 4x^2 + 8x + 5 & \quad +5x \qquad q_1 x \quad \Big\} = Q \\
-(5x)d & -(5x^3 + 10x^2 - 5x) & \quad -6 \qquad q_0 \\
D'' & -6x^2 + 13x + 5 & \\
-(-6)d & -(-6x^2 - 12x + 6) & \\
 & \underbrace{25x - 1}_{R} &
\end{array}
$$

$Q = x^2 + 5x - 6$

$R = 25x - 1$

$$\underbrace{x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 8x + 5}_{D} = \underbrace{(x^2 + 5x - 6)}_{Q} \cdot \underbrace{(x^2 + 2x - 1)}_{d} + \underbrace{(25x - 1)}_{R}.$$

— EUCLIDES 2 —

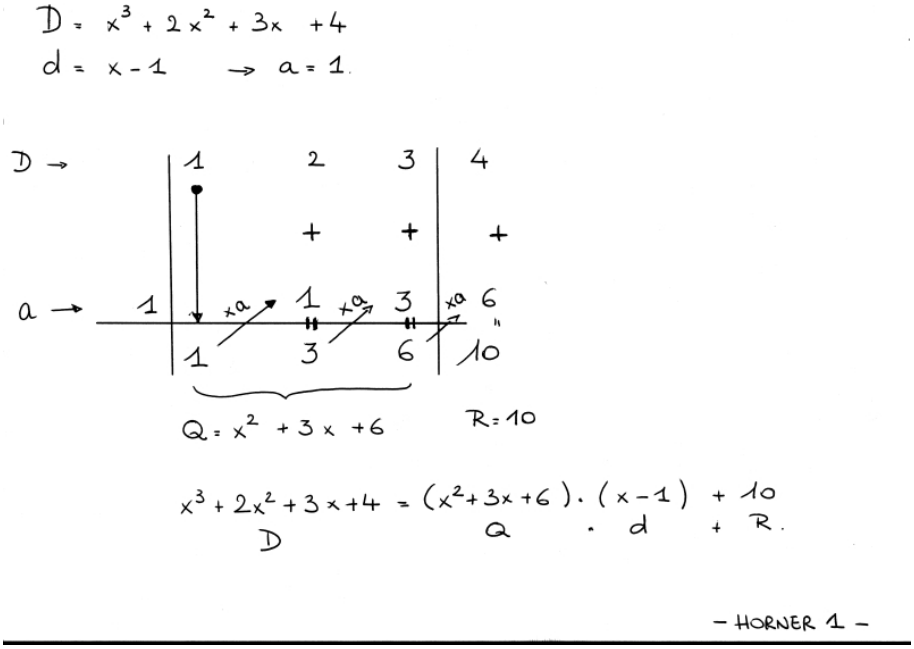
$$
\begin{array}{rl}
x^4 + x^2 + 3x + 5 & \quad \big| \; x + 1 \\
-(x^4 + x^3) & \quad x^3 - x^2 + 2x + 1 \\
-x^3 + x^2 + 3x + 5 & \\
-(-x^3 - x^2) & \\
2x^2 + 3x + 5 & \\
-(2x^2 + 2x) & \\
x + 5 & \\
-(x + 1) & \\
4 &
\end{array}
$$

$$x^4 + x^2 + 3x + 5 = (x^3 - x^2 + 2x + 1) \cdot (x + 1) + 4.$$

— EUCLIDES 3 —

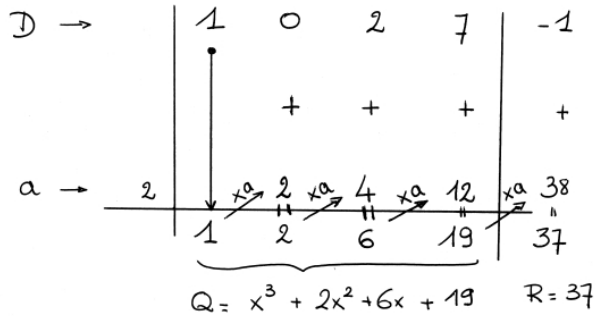
3.4 Règle de Horner

Si on doit diviser un polynôme D par un polynôme de la forme $d = x - a$, on peut utiliser un schéma plus simple, qu'on appelle la "règle de Horner". Voici quelques exemples de ce genre de division.



$D = x^4 + 2x^2 + 7x - 1 = x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 7x - 1$ (!)

$d = x - 2 \rightarrow a = 2$



$Q = x^3 + 2x^2 + 6x + 19 \quad R = 37$

$x^4 + 2x^2 + 7x - 1 = (x^3 + 2x^2 + 6x + 19).(x - 2) + 37$

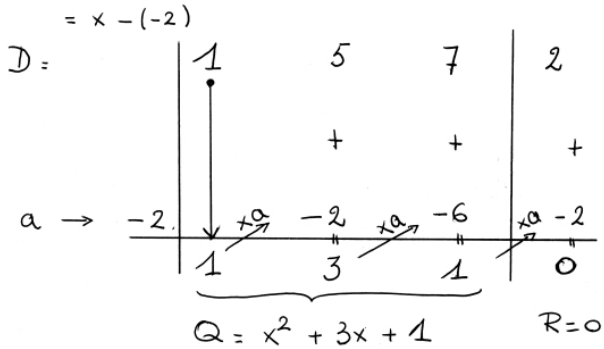
$D \quad Q \quad d \quad + R$

– HORNER 2 –

$D = x^3 + 5x^2 + 7x + 2$

$d = x + 2 \rightarrow a = -2$

$= x - (-2)$

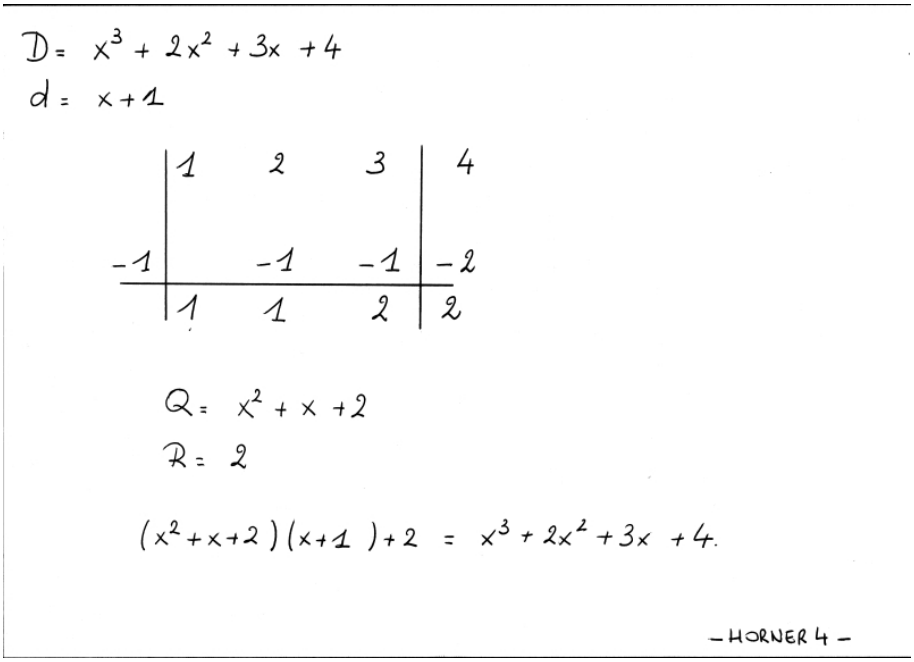


$Q = x^2 + 3x + 1 \quad R = 0$

$x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = (x^2 + 3x + 1).(x + 2) + 0$

$D \quad Q \quad . \quad d \quad + R.$

– HORNER 3 –



3.5 Décomposition en facteurs

Dans certaines applications, il est très important de pouvoir écrire une expression comme un produit de facteurs plus simples. Ceci est le cas, par exemple, si on cherche les valeurs d'un inconnu x qui est tel que l'expression s'annule après la substition de cette valeur : on sait qu'un produit ne peut être égal à zéro que quand (au moins) un des facteurs est égal à zéro. Il suffit donc de chercher les valeurs de l'inconnu tels que les facteurs s'annullent. Par exemple, on sait que

$$x^2 - 4x = x \cdot (x - 4),$$

et, par conséquent, les valeurs de x tels que

$$x^2 - 4x = 0$$

sont données par

$$x = 0, \qquad x - 4 = 0,$$

donc $x = 0$ et $x = 4$.

3.5.1 Technique 1 : Mettre en évidence les termes communs

Si chaque terme d'une expression contient un facteur identique, la distributivité nous montre que ce terme commun peut être "mis en évidence", c'est-'a-dire, on peut écrire l'expression comme un produit avec le terme commun comme un des facteurs.
Par exemple, cette méthode nous permet d'écrire

$$2x^3 + 4x^2 + 6x = 2x \cdot (x^2 + 2x + 3).$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} ax + 3x + ay + 3y &= (a+3)x + (a+3)y \\ &= (a+3)(x+y). \end{aligned}$$

3.5.2 Technique 2 : Produits remarquables

Parfois, une expression donnée peut être considérée comme un produit remarquable. Ceci est le cas, par exemple, si l'expression contient une différence de deux carrés ou de deux cubes. Par exemple, on voit que

$$\begin{aligned} &9x^2 - 64a^2 = (3x - 8a) \cdot (3x + 8a), \\ &3x^3 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3), \end{aligned}$$

et de la même façon on montre que

$$\begin{aligned} &5x^2 - 30x + 45 = 5(x^2 - 6x + 9) = 5(x - 3)^2, \\ &4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2. \end{aligned}$$

On a donc beaucoup d'intérêt à étudier la forme générale des produits remarquables, et à apprendre comment on peut reconnaître cette forme dans une expression générale.

3.5.3 Technique 3 : Décomposition partielle

Dans quelques cas, une expression donnée peut être décomposée en facteurs en considérant d'abord quelques termes de l'expression qui forment un produit remarquable ou dans lesquels on peut mettre en évidence un terme

commun. Le résultat de cette opération est alors souvent une expression plus simple à décomposer en facteurs.
Ceci est le cas, par exemple, pour les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
a^2 - 2ab + b^2 - c^2 &= (a^2 - 2ab + b^2) - c^2 \\
&= (a-b)^2 - c^2 \\
&= ((a-b) - c)((a-b) + c) \\
&= (a - b - c)(a - b + c), \\
ab + ac + b^2 + bc &= (ab + ac) + (b^2 + bc) \\
&= a(b + c) + b(b + c) \\
&= (a + b)(b + c), \\
a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc &= (a^2 + 2ab + b^2) + (ac + bc) \\
&= (a + b)^2 + (a + b)c \\
&= (a + b)((a + b) + c) \\
&= (a + b)(a + b + c).
\end{aligned}$$

3.5.4 Technique 4 : Diviser par un facteur connu

On sait que, si on obtient zéro après avoir substitué dans un polynôme la variable x par une valeur réelle a, la décomposition en facteurs du polynôme contient un facteur de la forme $x - a$. En faisant une division euclidienne du polynôme par $x - a$ (le reste R de la division est automatiquement 0 dans ce cas), on écrit le polynôme comme un produit,

$$P = Q \cdot (x - a), \qquad R = 0.$$

Considérons, par exemple, le polynôme

$$P = x^2 - 3x + 2.$$

Il est clair qu'on obtient 0 quand on remplace $x = 1$, et la décomposition en facteurs de P doit donc contenir un facteur de la forme $x - 1$. L'autre facteur est obtenu en faisant la division euclidienne (ou en utilisant la règle de Horner), et on déduit que

$$P = (x - 1)(x - 2).$$

De la même façon, on montre que

$$P = x^3 + 3x^2 - 4$$

contient un facteur de la forme $x - 1$. La division euclidienne nous montre alors que

$$P = (x-1)(x^2+4x+4) = (x-1)(x+2)^2.$$

3.6 Polynômes en plusieurs variables

Jusqu'à présent, on s'est limité à une étude de polynômes en une variable, mais on peut généraliser facilement cette notion de polynôme, en admettant plusieurs variables.
A cet effet, on introduit d'abord la notion d'un "monôme". Ceci est une expression formée comme un produit d'un nombre (le coefficient) et de puissances d'une ou de plusieurs variables. Voici quelques exemples de monômes :

$$x^2, \quad x^3y^2, \quad 3x, \quad 7xy^3z, \ldots$$

Le degré d'un monôme est défini comme la somme des puissances des variables. Le degré du monôme x^2, par exemple, est 2, tandis que x^3y^2 (resp. $3x$, $7xy^3z$) sont des monômes de degré 5 (resp. 1, 5).
Un polynôme en plusieurs variables peut maintenant être introduit comme une somme de monômes en ces variables. Le degré d'un tel polynôme est défini comme le plus grand des degrés des monômes appartenant au polynôme. Ainsi,

$$yx^3 + 2yx^2 + 3y^2x + 5y^4$$

est un polynôme de degré 4 dans les variables x et y.

⇐ ⇑ ⇒ Exercices

Chapitre 4

Résolution d'équations

Dans ce chapitre, on étudie des expressions mathématiques de la forme $P = Q$, où les parties P et Q dépendent, en général, d'une variable, qu'on dénote ici par x. Si l'expression $P = Q$ est valable pour n'importe quelle valeur de la variable x, on parle d'une identité mathématique. Si l'expression n'est valable que pour un nombre "limité" de valeurs de la variable x, l'expression est appelée une équation. La variable x est alors considérée comme un inconnu dans l'équation, et la résolution de léquation est la détermination des solutions de l'équation, c'est-à-dire des valeurs de l'inconnu x pour lesquels l'expression est valable.
On voit immédiatement que, pour une valeur réelle arbitraire $x \in \mathbb{R}$,

$$(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x,$$

et cette expression est donc une identité. L'expression

$$x^2 = 1,$$

par contre, n'est valable que pour des valeurs spécifiques de $x \in \mathbb{R}$, et on parle donc d'une équation. Les solutions sont, dans ce cas, données par

$$x = 1, \qquad x = -1.$$

Si $P = Q$, il est clair que

$$P + A = Q + A, \qquad P \cdot B = Q \cdot B,$$

où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}_0$ sont des nombres réels arbitraires. On peut donc toujours remplacer une équation (ou une identité) par une autre expression équivalente en ajoutant ou en multipliant par un nombre ou une expression (différent de 0).

4.1 Résolution d'équations linéaires

On dit qu'une expression donnée est une équation linéaire (dans l'inconnu x) si, éventuellement après une simplification, l'équation peut être écrite sous la forme

$$ax + b = 0,$$

où a et b sont des nombres réels (ou des expressions qui ne dépendent pas de l'inconnu x) et $a \neq 0$.

Remarque. Dans le cas où $a = 0$, on ne parle plus d'une équation linéaire dans l'inconnu x. Si $b = 0$ il est clair que l'expression est valable pour n'importe quelle valeur de x, et l'expression est donc une identité. Dans le cas où $b \neq 0$ l'équation n'a pas de solution. Dans la suite, on considère, en général, le cas $a \neq 0$.

Si on soustrait la valeur de b des deux côtés, on reduit l'équation à la forme

$$ax = -b,$$

et en divisant l'équation complète par $a \neq 0$ on obtient la solution (unique) de l'équation lineéaire,

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Par exemple, l'équation linéaire $2x + 6 = 0$ dans l'inconnu x peut être écrite comme

$$2x = -6, \qquad x = -3,$$

et on conclut que $x = -3$ est la seule solution possible de cette équation.

De la même façon, afin de reduire l'équation

$$2x + 3 = 7x - 2$$

à la forme typique on soustrait d'abord l'expression $7x-2$ des deux côtés de l'équation. On obtient alors

$$\begin{aligned}
&(2x+3)-(7x-2)=0,\\
&2x+3-7x+2=0,\\
&-5x+5=0,\\
&-5x=-5,\\
&x=\frac{-5}{-5},\\
&x=1.
\end{aligned}$$

4.2 Résolution d'équations quadratiques

Une équation quadratique (dans l'inconnu x) est une expression qui, éventuellement après simplification, prend la forme

$$ax^2+bx+c=0,$$

où $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$.
Remarque. Quand $a=0$ l'équation n'est plus quadratique dans l'inconnu x. L'équation peut alors être résolue comme une équation linéaire.
Les équations quadratiques les plus simples sont de la forme

$$x^2=A,\qquad A\in\mathbb{R}.$$

Si A est strictement positif, une telle équation a deux solutions, $x=\sqrt{A}$ et $x=-\sqrt{A}$. Dans le cas où $A=0$, on trouve une seule solution $x=0$. Finalement, pour des valeurs négatives de A il est impossible de trouver une valeur réelle x qui est une solution de l'équation quadratique.
Pour la résolution des autres équations quadratiques, on les réduit d'abord à la forme plus simple en les écrivant comme

$$\begin{aligned}
&a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0,\\
&x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,\\
&\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0,
\end{aligned}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=0,$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0,$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

L'expression $D=b^2-4ac$ est appelée le discriminant de l'équation quadratique. Si le discriminant est strictement positif, les solutions de l'équation sont données par

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{D}}{2a},$$

et, par conséquent,

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{D}}{2a},\qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

sont les solutions de l'équation donnée.
Dans le cas où le discriminant $D=0$, on voit que

$$x=-\frac{b}{2a}$$

forme la solution unique de l'équation, et si le discriminant est négatif, on constate immédiatement que l'équation quadratique n'a pas de solution réelle.
L'équation quadratique

$$x^2-7x+10=0,$$

par exemple, a pour discriminant

$$D=(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10=49-40=9.$$

Les solutions de l'équation sont donc données par

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{7\pm 3}{2},$$

et, apr conséquent, $x=2$ et $x=5$ sont les seules solutions.

Le discriminant de l'équation

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

est donné par

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 144 - 144 = 0,$$

et on trouve donc une solution unique,

$$x = -\frac{-12}{2} = 6.$$

L'équation

$$2x^2 + 4x + 5 = 0$$

a un discriminant négatif,

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4,$$

et on en déduit que cette équation n'a aucune solution réelle.

⇐ ⇑ ⇒ Exercices

Chapitre 5

Résolution de systèmes d'équations

Dans le chapitre précédent on a étudié la résolution d'équations linéaires en un inconnu. Parfois, la description d'un problème pratique utilise plusieurs inconnus, et les valeurs exactes de ces inconnus doivent alors être déterminées à l'aide de plusieurs équations. On parle alors d'un système d'équations dans ces inconnus. Dans ce chapitre, on se limite au cas où toutes les équations d'un système sont linéaires dans les inconnus, et on cherche la solution de ce système, c'est-à-dire, toutes les valeurs des inconnus qui satisfont aux équations.
Considérons, par exemple, le problème suivant : Dans 4 ans, l'age d'Amélie sera trois fois l'age de Bernadette. Aujourd'hui, Amélie a 18 ans de plus que Bernadette. Quel est l'age d' Amélie et de Bernadette ?
Si on représente les ages d'Amélie et de Bernadette par les symbôles A et B, la première donnée peut être traduite comme la formule

$$A + 4 = 3(B + 4),$$

et la deuxième donnée est représentée par la formule

$$A = B + 18.$$

On sait donc que les nombres A et B (les inconnus du problème) satisfont au système d'équations

$$\begin{cases} A+4 &= 3(B+4) \\ A &= B+18 \end{cases}$$

On en déduit que

$$A = 23, \quad B = 5.$$

En utilisant les règles de calcul élémentaires, un système de m équations linéaires en n inconnus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peut toujours être représenté sous la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{cases}$$

Pour l'exemple ci-dessus, ces équations prennent la forme

$$\begin{cases} A - 3B &= 8 \\ A - B &= 18 \end{cases}$$

Un deuxième exemple est donné par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 3x + 3y + z = 12. \end{cases}$$

La solution de ce système est de la forme

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.$$

Une première méthode pour la solution de systèmes d'équations est la *méthode de substitution*. Dans cette méthode, une équation du système est résolue pour un inconnu. On obtient alors une expression pour cet inconnu en fonction des inconnus restants. En substituant cette expression dans les autres équations, on obtient un système d'équations plus simple, et la valeur du dernier inconnu peut alors être déterminée à l'aide d'une équation linéaire. On utilise alors cette valeur et les expressions déjà obtenues pour la détermination des valeurs des autres inconnus.
Dans le premier exemple, il suit de la deuxième équation que

$$A = B + 18,$$

et en substituant cette expression dans la première équation, on voit que

$$(B + 18) - 3B = 8,$$

d'où il suit que

$$-2B + 10 = 0, \qquad B = 5.$$

Substitution de cette valeur dans l'expression pour l'inconnu A donne alors

$$A = B + 18 = 5 + 18 = 23.$$

Dans le deuxième exemple, il suit de la première équation que

$$x = 6 - y - z,$$

et on obtient donc, après substitution, le système

$$\begin{cases} y & + & 2z & = & 8, \\ & & -2z & = & -6. \end{cases}$$

Il suit maintenant de la deuxième équation que

$$z = 3,$$

et la dernière équation restante prend donc la forme

$$y + 6 = 8, \qquad y = 2.$$

Substitution de ces valeurs dans les expressions pour z et x nous donne alors la solution

$$x = 1, \qquad y = 2, \qquad z = 3.$$

Une deuxième méthode pour la solution de systèmes d'équations linéaires est la *méthode de combinaison*. On remarque ici que, si on ajoute à une équation (ou un multiple d'une équation) un multiple d'une autre équation (ou, en général, une combinaison linéaire des autres équations), le nouveau système d'équations est équivalent au système original, c'est-à-dire, les solutions du nouveau système sont les mêmes que celles du système original. Dans la méthode de combinaison, on essaye de créer, en faisant des combinaisons spéciales, un système équivalent plus simple, dans lequel les solutions peuvent être déterminées immédiatement.

Dans notre premier exemple, on soustrait d'abord la deuxième équation de la première, et on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} & & -2B & = & -10, \\ A & - & B & = & 18. \end{cases}$$

Ensuite, on multiplie la deuxième équation par deux et on soustrait la première équation. Cette opération nous donne le système équivalent

$$\begin{cases} & & -2B & = & -10, \\ 2A & & & = & 46. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que

$$A = 23, \qquad B = 5.$$

Pour la résolution du deuxième exemple, on soustrait d'abord un multiple de la première équation de la deuxième et de la troisième équation, et on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 6, \\ & & y & + & 2z & = & 8, \\ & & & & -2z & = & -6. \end{cases}$$

En ajoutant la troisième équation à la deuxième, on obtient

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 6, \\ & & y & & & = & 2, \\ & & & & -2z & = & -6, \end{cases}$$

et finalement on multiplie la première équation par deux, on soustrait la deuxième et on ajoute la troisième, ce qui nous donne le système équivalent

$$\begin{cases} 2x & & & = & 2, \\ & y & & = & 2, \\ & & -2z & = & -6, \end{cases}$$

En résolvant ces équations linéaires simples, on obtient la solution prévue,

$$x = 1, \qquad y = 2, \qquad z = 3.$$

Dans les exemples étudiés ci-dessus, on trouve toujours une solution unique. Ceci n'est pas toujours vrai.
Si, par exemple, on étudie un système d'équations dont le nombre d'inconnus est supérieur au nombre d'équations, la solution dépend souvent d'un nombre de "paramètres libres", c'est-à-dire que les valeurs d'un nombre d'inconnus peuvent être choisies arbitrairement, et que les valeurs des autres inconnus dépendent de ces choix.
Considérons, par exemple, le système

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$$

A l'aide de la méthode de combinaison, on réduit ce système au système équivalent

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ z = 2. \end{cases}$$

En choisissant pour l'inconnu y une valeur arbitraire A, on constate que

$$x = 4 - A, \quad z = 2,$$

nous donne une solution du système. Par exemple, le choix

$$x = 4, \quad y = 0, \quad z = 2$$

est une solution, mais également

$$x = 0, \quad y = 4, \quad z = 2$$

et

$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = 2.$$

Il existe également des systèmes d'équations qui n'ont pas de solution, parce qu'ils contiennent des équations "contradictoires". Un exemple très simple d'un tel système est donné par les équations linéaires

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Dans ce cas, en résolvant le système d'équations à l'aide d'une des méthodes introduites ci-dessus, on rencontrera une équation de la forme

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b.$$

Si $b = 0$, l'équation est toujours satisfaite, et elle peut donc être éliminée du système parce qu'elle ne pose aucune restriction sur les solutions. Si, par contre, $b \neq 0$, il s'agit d'une équation qui ne peut jamais être satisfaite, et il est donc impossible de trouver une solution acceptable pour ce système d'équations.
Considérons, par exemple, le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 3x + 2y + z = 12. \end{cases}$$

Si on soustrait la première équation de la deuxième, et trois fois la première équation de la troisième, on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y + 2z = 8, \\ -y - 2z = -6, \end{cases}$$

et en ajoutant maintenant la troisième équation à la deuxième on constate que

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 0 = 2, \\ -y - 2z = -6, \end{cases}$$

et on en déduit que le système n'a pas de solutions.
Par contre, le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + 2y + 2z = 1, \\ x + 3y + 3z = 1. \end{cases}$$

nous montre (après combinaison de certaines équations) que

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ y + z = 0, \\ 2y + 2z = 0, \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ y + z = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

La dernière équation peut donc être éliminée, et la solution du système est donnée par

$$x = 1, \qquad y = -A, \qquad z = A.$$

Remarque. Une équation linéaire en deux inconnus peut être représentée graphiquement comme une droite dans le plan. La représentation graphique d'une équation linéaire en trois inconnus est un plan dans l'espace à trois dimensions.
La résolution d'un système d'équations linéaires correspond alors à la détermination des points qui appartiennent au graphique de chaque équation. Il est alors clair que, en général, un système de deux équations en deux inconnus a une solution unique : le point d'intersection des deux droites correspondantes. Si les droites sont identiques, on a plusieurs solutions, et dans le cas où les droites sont parallèles mais différentes, le système n'a pas de solution.

⇐ ⇑ ⇒ Exercices

Chapitre 6

Fonctions d'une variable réelle

6.1 Fonctions d'une variable réelle

Une *fonction réelle*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x),$$

souvent représentée par $y = f(x)$, est une préscription qui associe à un nombre réel x au maximum une (donc une ou aucune) valeur réelle $f(x)$. Le nombre $f(x)$ (s'il existe) est appelé *l'image* de x sous la fonction f. L'ensemble des nombres réels x qui ont une image sous la fonction f est *le domaine de définition* de la fonction f, que l'on dénote par $\mathrm{dom}(f)$.

Exemple. La fonction $y = x^2$ associe le nombre réel x avec son carré x^2. L'image de 0 sous la fonction est 0, l'image de 2 (resp. -3) est 4 (resp. 9). Le domaine de définition de la fonction est l'ensemble de tous les nombres réels, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$.

Exemple. La fonction $y = 3x + 1$ associe le nombre réel x avec le nombre réel $3x+1$. L'image de 0 sous la fonction est 1, l'image de 2 est 7. Le domaine de définition de la fonction est l'ensemble des nombres réels, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$.

Exemple. La fonction $y = \sqrt{x}$ associe au nombre réel x sa racine carrée (positive). L'image de 0 sous la fonction est 0, l'image de 9 est 3. Il est clair que la fonction donne seulement une image pour les nombres réels positifs

et, par conséquent, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.
Exemple. La fonction $y = \frac{1}{x}$ associe un nombre réel x avec sa valeur réciproque, $\frac{1}{x}$. L'image de 2 sous la fonction est 0.5, l'image de 0.4 est 2.5, et l'image de -1 est -1. Il est clair que l'image existe pour les valeurs réelles différentes de 0, et par conséquent $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}_0$.
Considérons une fonction réelle $y = f(x)$ et déterminons, pour chaque valeur $x \in \mathrm{dom}(f)$, l'image $f(x)$ de x sous la fonction f. On peut alors construire une représentation graphique de la fonction comme l'ensemble des points $(x, f(x))$ dans le plan. La figure qu'on obtient de cette façon est appelée le *graphique* de la fonction f.

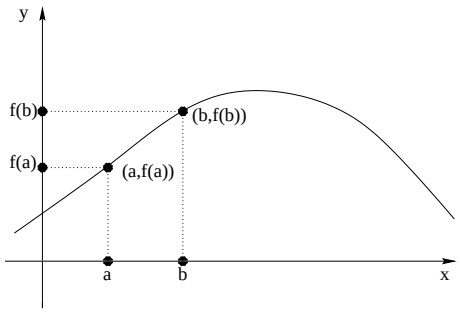


FIGURE 6.1 – Représentation graphique d'une fonction réelle

Les fonctions d'une variable forment un outil très efficace pour la description de plusieurs phénomenes, par exemple physiques (comme le mouvement d'une masse) et économiques.
Exemple. Un train roule avec une vitesse constante de 30 m/s. Si on représente le nombre de secondes depuis le départ comme t, la distance parcourue est donnée par la fonction réelle

$$s(t) = 30t.$$

Exemple. Un train part d'Anvers et roule avec une vitesse constante de 50 m/s vers Bruxelles, 40 km plus loin. La distance (exprimée en mètres) jusqu'au point final du trajet est donnée, pour chaque instant t, par la fonction réelle

$$s(t) = 40000 - 50t.$$

Exemple. Considérons une masse qui tombe d'une hauteur de 10000 mètre, sous l'influence de la gravité. La hauteur au dessus du sol est alors décrite

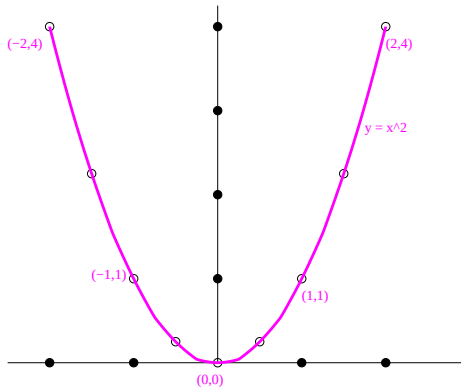


FIGURE 6.2 – Représentation graphique de la fonction $y = x^2$

par la fonction

$$h(t) = 10000 - 5t^2.$$

On en déduit que, après 10 secondes, l'objet se trouve à 9500 mètres au-dessus du sol. Après 30 secondes l'objet se trouve à 5500 mètres.

Exemple. L'oscillation d'une masse, suspendue à un ressort, est décrite par la fonction réelle

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

La valeur $x(t)$ représente alors l'écart du point d'équilibre, atteint par l'objet au moment t. Les valeurs A, ω et φ sont des constantes.

Exemple. Un modèle représentant le lien entre le prix P d'un objet (une bicyclette, par exemple) et la demande Q (le nombre d'exemplaires qu'on peut vendre à un prix donné) est décrit par

$$Q = 10000 - 10P.$$

Cette fonction nous permet de déterminer que, à un prix de 500 euros, on vendera 5000 bicyclettes. A un prix de 800 euros ce nombre diminuera à 2000 exemplaires.

6.2 Fonctions lineaires

Une famille importante et simple de fonctions réelles $y = f(x)$ est formée par les fonctions linéaires

$$y = mx + C,$$

où C et m sont deux paramètres (valeurs réelles arbitraires). Dans le cas où $m = 0$, on parle d'une fonction *constante*,

$$y = C.$$

La représentation graphique d'une fonction linéaire forme une droite dans le plan. Il suffit, par conséquent, de déterminer deux points du graphique et de tracer la ligne droite passant par ces deux points.
Exemple. La fonction linéaire $y = x - 1$ donne, pour $x = -1$, la valeur $y = -2$, et $x = 3$ donne la valeur $y = 2$. La droite passant par les points dont les coordonnées sont $(-1, -2)$ et $(3, 2)$ représente donc le graphique de cette function linéaire.

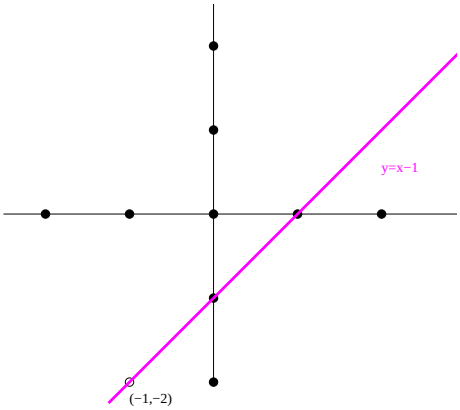


FIGURE 6.3 – Représentation graphique de la fonction linéaire $y = x - 1$

Exemple. Sous la fonction linéaire $y = 3x + 1$ la valeur $x = 0$ donne une image de $y = 1$, et $x = 1$ correspond à la valeur $y = 4$. La ligne droite passant

par les points $(0, 1)$ et $(1, 4)$ vnous donne donc la représentation graphique de cette fonction linéaire.

Exemple. La fonction linéaire $y = -2x + 5$ donne à $x = -2$ une image de $y = 9$, et $x = 1$ correspond à $y = 3$. Il faut donc tracer la ligne passant par $(-2, 9)$ et $(1, 3)$ afin d'obtenir la représentation graphique de cette fonction linéaire.

Dans le cas spécial d'une fonction constante $y = C$, une valeur quelconque x correspondra à une image y qui sera toujours de C. La représentation graphique d'une telle fonction constante est donc toujours une droite horizontale.

Une fonction linéaire $y = mx + C$ est représentée par une droite dans le plan. La valeur m donne une indication de la "direction" de cette droite, elle est appelée le *coefficient directeur* ou *coefficient angulaire* de la droite. On peut interpréter ce coefficient directeur comme l'accroissement (ou décroissement) dans le sens vertical, correspondant à un accroissement d'une unité dans le sens horizontal. Ce rapport dépend clairement de l'angle que forment la droite et l'axe horizontal. Deux droites qui ont le même coefficient directeur sont donc parallèles. Un coefficient directeur négatif indique une droite décroissante, une valeur supérieure de x correspondant à une valeur inférieure en y, les droites dont le coefficient directeur est positif sont croissantes. La valeur C donne l'image y correspondant à $x = 0$, et correspond donc à l'intersection avec l'axe y. Afin de déterminer l'intersection de la droite $y = mx + C$ avec l'axe x (la valeur x correspondant à la valeur y de 0), on résout l'équation linéaire

$$mx + C = 0,$$

pour trouver, en général,

$$x = -\frac{C}{m}.$$

Dans le plan, considérons deux points dont les coordonnées sonten (x_1, y_1) et (x_2, y_2). Si les coordonnées x de ces points ne sont pas identiques, une seule droite non-verticale passera par ces points. Un accroissement $x_2 - x_1$ dans le sens horizontal correspondant à un changement $y_2 - y_1$ dans le sens vertical, le coefficient directeur de cette droite sera donné par

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

La droite est donc la représentation graphique d'une fonction linéaire de la

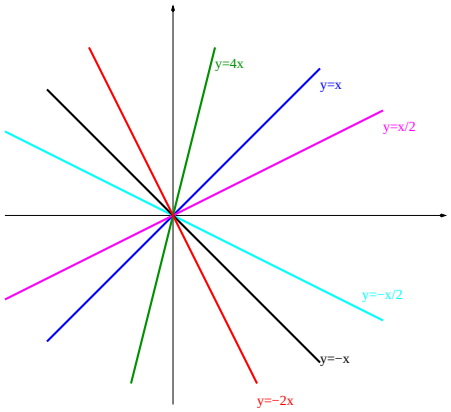


FIGURE 6.4 – Fonctions linéaires avec coefficients directeurs différents

forme

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + C.$$

En observant que (x_1, y_1) appartient à cette droite, la constante C doit être telle que

$$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + C.$$

Il en suit que $C = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$, menant à l'équation

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1.$$

La fonction peut être exprimée sous la forme

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Un raisonnement similaire nous permet également de dire qu'une droite, passant par un point (x_1, y_1) et avec un coefficient directeur m, est donnée par la fonction linéaire

$$y = m(x - x_1) + y_1.$$

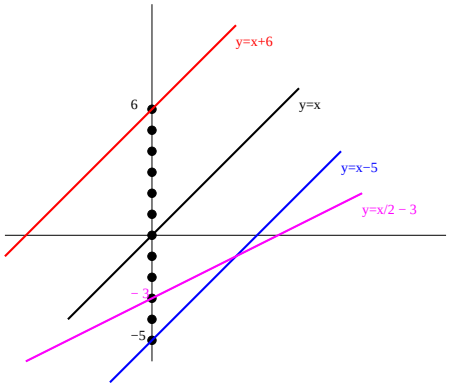


FIGURE 6.5 – Le rôle de la valeur C

Exemple. La droite passant par les points $(1, 5)$ et $(3, 11)$ a un coefficient directeur de

$$m = \frac{11 - 5}{3 - 1} = 3,$$

et sera donc décrite par la fonction linéaire

$$y = 5 + 3(x - 1)$$

ou

$$y = 3x + 2.$$

6.3 L'interpolation (linéaire)

Les techniques d'*interpolation* forment une famille de méthodes mathématiques permettant de faire des prédictions pour une situation inconnue, en se basant sur des situations connues "proches" de la situation recherchée. Par exemple, si l'on désire déterminer une valeur (approchée) de la consommation de carburant d'un véhicule pour une vitesse spécifique (disons, 80 km/h), en

ne connaissant que ces paramètres pour une série d'autres vitesses (disons, 50 km/h, 90 km/h et 120 km/h).
En termes mathématiques, on souhaite déterminer l'image d'une fonction (inconnue) $y = f(x)$ pour une valeur x_0, en ne connaissant que les images d'une série d'autres valeurs de la variable x.
Un cas spécial de cette technique est appelé *interpolation linéaire*. Dans ce cas, on essaye de déterminer la valeur approchée d'une fonction dans le point x_0 à l'aide de deux valeurs (images) connues $f(x_1)$ et $f(x_2)$ de cette fonction pour les points x_1 et x_2, situés des deux côtés du point x_0. A cet effet, le graphique de la fonction (inconnue) sera remplacé par une ligne droite passant par les deux points connus $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, et la valeur $f(x_0)$ dans le point intermédiaire sera calculée à l'aide de la fonction linéaire $y = mx + C$ correspondant à cette droite.

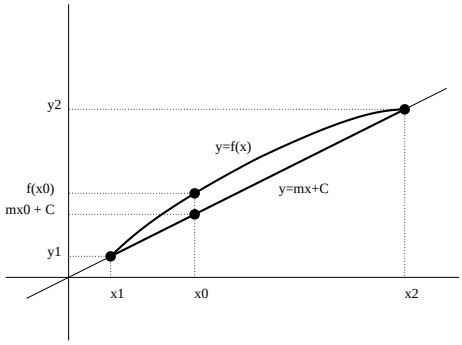


FIGURE 6.6 – Interpolation linéaire

On a remarqué ci-dessus que la droite passant par deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est décrite par la fonction linéaire

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

La valeur (approchée) de y_0 ou de $f(x_0)$ peut donc être calculée comme

$$y_0 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1).$$

Une méthode alternative permettant la construction de cette formule suit le raisonnement suivant. Si un accroissement (changement) $x_2 - x_1$ de la variable x correspond à un changement $y_2 - y_1$ de la variable y, un changement $x_0 - x_1$ correspondra à un changement

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1).$$

Etant donné notre point de départ y_1, un tel changement nous mène au résultat

$$y_0 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1).$$

Exemple. Supposons que, dans une rivière, le niveau d'eau soit de 8 mètres à 14h, et qu'à 14h20 ce niveau d'eau soit de 8.30 mètres. Quel était alors le niveau d'eau à 14h15 ?
Si, en 20 minutes, le niveau d'eau a subi un accroissement de 0.30 mètres, on peut dire que ce niveau d'eau changera de

$$\frac{0.30}{20} = 0.015\text{m}$$

par minute. En 15 minutes, le niveau d'eau aura donc subi un accroissement de

$$15 \cdot 0.015 = 0.225\text{m},$$

le niveau d'eau à 14h15 était donc de 8.225 meter.
A l'aide de la formule, on peut directement dire que

$$y_0 = 8 + \frac{8.30 - 8}{14:20 - 14:00}(14:15 - 14:00) = 8.225$$

Exemple. Si un navire de déplace avec une vitesse de 10 noeuds, la consommation de carburant est de 3 tonnes par heure. A une vitesse de 14 noeuds, elle augmente à 5 tonnes par heure. Quelle est alors la consommation de carburant pour une vitesse de 13 noeuds ?
A l'aide de la formule d'interpolation linéaire, on calcule une consommation de

$$3 + \frac{5 - 3}{14 - 10}(13 - 10) = 4.5\text{tonnes par heure.}$$

En effet, si un accroissement de vitesse de 4 noeuds correspond à un accroissement de consommation de 2 tonnes par heure, un accroissement de la vitesse de 1 noeud correspond à une augmentation de la consommation de 0.5 tonnes par heure. Un accroissement de 3 noeuds (de 10 à 13 noeuds) correspondra donc à une consommation additionnelle de 1.5 tonnes, par rapport à la consommation de 3 tonnes par heure que l'on observe à la vitesse de 10 noeuds.

6.4 Kwadratische functies

Une deuxième famille intéressante de fonctions d'une variable réelle est formée par les fonctions *quadratiques*. Ces fonctions sont de la forme

$$y = ax^2 + bx + c,$$

où a, b et c sont des nombres réels arbitraires, mais où $a \neq 0$.
Le graphique d'une fonction quadratique

$$y = ax^2$$

forme une parabole. Le *sommet* de cette parabole est situé dans le point $(0, 0)$, et la valeur a correspond à l'orientation de la parabole. Pour une valeur positive de a, les valeurs de y seront plus grandes pour des valeurs de x plus grandes, le sommet sera donc un minimum (et la parabole "s'ouvre vers le haut", le dessin correspond à une vallée). Pour une valeur négative de a, la valeur de y deviendra de plus en plus négative pour des valeurs de x de plus en plus grandes, le sommet est donc un maximum (et la parabole "s'ouvre vers le bas", le dessin correspond à une montagne). Dans le dessin ci-joint, on constate également qu'une valeur (absolue) de a plus grande correspond à une pente "plus raide".
Etant donné une fonction quadratique arbitraire,

$$y = ax^2 + bx + c$$

on peut construire une expression alternative de la forme

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

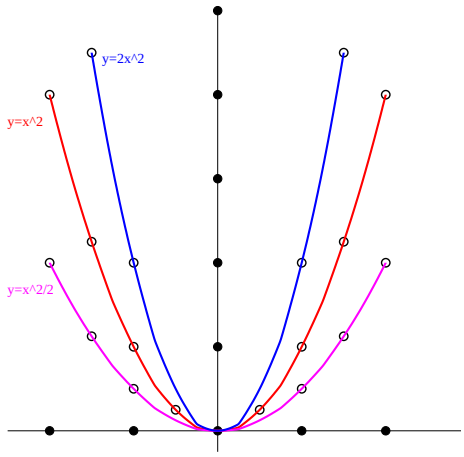


FIGURE 6.7 – Représentation graphique de la fonction $y = ax^2$

menant à la forme

$$y = a(x - A)^2 + B, \qquad A = -\frac{b}{2a}, \quad B = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Une telle fonction correspond donc à une version "déplacée" de la courbe $y = ax^2$. D'abord, on considère un déplacement horizontal sur une distance A (à droite pour un A positif, à gauche si A est négatif), suivi d'un déplacement vertical sur une distance B (vers le haut si B est positif, vers le bas pour une valeur négative).
Le graphique d'une fonction quadratique forme donc toujours une *parabole* dans le plan. La valeur du paramètre a nous donne une orientation pour la parabole ("montagne" pour une valeur négative de a, "vallée" pour un a positif) et la pente. Le *sommet* de la parabole sera situé dans le point

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

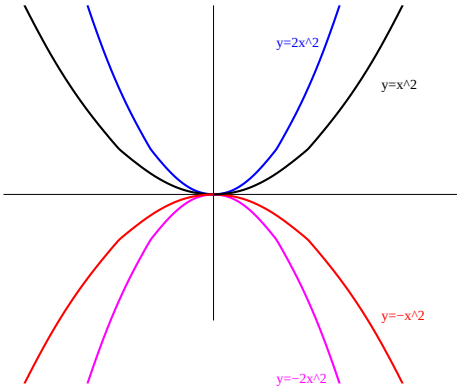


FIGURE 6.8 – La fonction quaratique $y = ax^2$

6.5 Les points d'intersection

Considérons deux courbes dans le plan, données par les fonctions

$$y = f(x), \qquad y = g(x).$$

Afin de déterminer les points d'intersection de ces courbes, il suffit de remarquer que, dans un point d'intersection,

$$f(x) = g(x).$$

En résolvant cette équation, on peut donc déterminer les coordonnées x de tous ces points d'intersection.
Exemple. Le point d'intersection de deux droites, données par les fonctions linéaires $y = 3x+2$ et $y = -x-6$, peut être déterminé en résolvant l'équation linéaire

$$3x + 2 = -x - 6.$$

On en déduit que la coordonnée x du point d'intersection est de -2, la coordonnée y correspondante est de -4. L'intersection sera donc située en $(-2, -4)$.

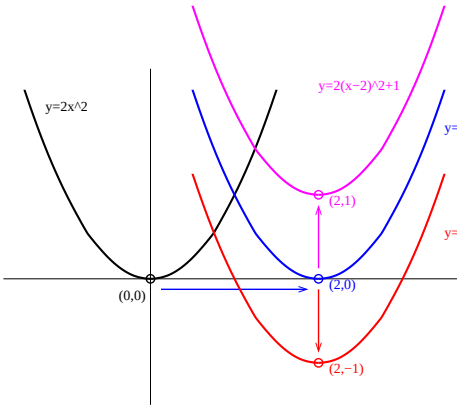


FIGURE 6.9 – Graphique de la fonction $y = a(x - A)^2 + B$

Exemple. Les intersection de la droite, donnée par la fonction linéaire $y = 3x+9$ et de la parabole, donnée par $y = 3x^2-9$, sont déterminées en résolvant l'équation (quadratique)

$$3x^2 - 9 = 3x + 9.$$

Cette équation équivaut l'équation quadratique

$$3x^2 - 3x - 18 = 0$$

dont les solutions sont -2 et 3. Les intersections se trouvent donc dans les points $(-2, 3)$ et $(3, 18)$.

⇐ ⇑ ⇒ Exercices

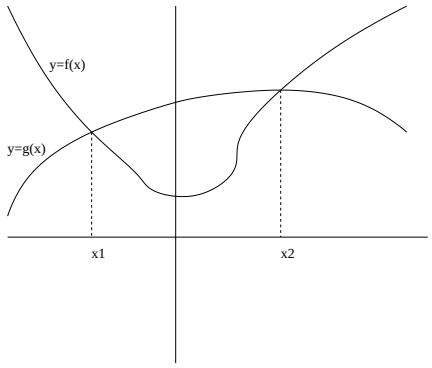


FIGURE 6.10 – Intersections de deux courbes

Arithmétique - Enoncés

Exercice 1 - Enoncé

Calculez

1. $1 + 2 \cdot 3$
2. $2 \cdot 8 - 6$
3. $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5$
4. $6 \cdot 7 - 8 \cdot 9$
5. $7 \cdot 3 - 100/4$
6. $6 + 10/2$
7. $200/4/2$
8. $40/8 - 18/3$

Théorie Sol

Exercice 2 - Enoncé

Calculez

1. $(4+5)\cdot 2$
2. $(3+6)\cdot(4+9)$
3. $(3+6)\cdot(4-9)$
4. $(3+6)/(2+1)$
5. $3+6/(2+1)$
6. $(3+7)/2+2$
7. $3+6/2+1$
8. $9-8/(2+2)+5\cdot(4+1)$
9. $(4+5)\cdot 2-4+5\cdot 2$

Théorie Sol

Exercice 3 - Enoncé

Calculez

1. $1/3 + \dfrac{8}{3}$
2. $2/3 + 4/5$
3. $(2/3) \cdot (4/5)$
4. $\dfrac{1}{9} - \dfrac{2}{5}$
5. $\dfrac{1}{-9} \cdot \dfrac{-3}{5}$
6. $(2/3)/(4/5)$
7. $\dfrac{1 + \dfrac{2}{3}}{1 - \dfrac{2}{7}}$
8. $\dfrac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{8}{27}}$
9. $\dfrac{1 + 2 \cdot 3}{5 \cdot 2 + 9/3}$

Théorie Sol

Exercice 4 - Enoncé

Calculez

1. 2^4
2. $(-1)^3$
3. $5^3 - 2^5 + (-2)^3$
4. $(1 + 2 \cdot 3)^2$
5. $2 \cdot 7^2 - 8 \cdot 6^2$
6. $\sqrt{5 + 2 \cdot 2}$
7. $\sqrt{3^2 + 4 \cdot 4}$
8. $\sqrt{4^3}$
9. $\sqrt[5]{32}$
10. $\sqrt{2/3} \cdot \sqrt{\frac{8}{27}}$
11. $\sqrt{9} + \sqrt[3]{27} - 5 \cdot \sqrt{81}$

Théorie Sol

Exercice 5 - Enoncé

Calculez

$$(1+2\cdot 3)^2+2^3\cdot(5-6)^5+2\cdot 3^2-7/8+\frac{\sqrt{\frac{8}{125}}}{\sqrt{\frac{5}{2}}}$$

Théorie Sol

Exercice 6 - Enoncé

Résolvez toutes les exercices ci-dessus à l'aide de votre calculatrice.

Théorie Sol

Exercice 7 - Enoncé

Décrivez la série de calculs suivante à l'aide d'une seule formule mathématique. Simplifiez la formule le plus possible. Calculez le résultat final à la main et à l'aide de votre calculatrice.
"Prenez la somme de 1 et 2. Multipliez le résultat par 5, et calculez le carré de ce produit. Ajoutez 7 et le produit de 2 et du carré de 3. Divisez ce résultat par la somme du carré de 4 et de la racine carrée de 81, et ajoutez 5 au résultat. "

Théorie Sol

Arithmétique - Solutions

Exercice 1 - Solution

1. $1 + 2 \cdot 3 = 7$
2. $2 \cdot 8 - 6 = 10$
3. $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 26$
4. $6 \cdot 7 - 8 \cdot 9 = -30$
5. $7 \cdot 3 - 100/4 = -4$
6. $6 + 10/2 = 11$
7. $200/4/2 = 25$
8. $40/8 - 18/3 = -1$

Théorie OK Détail

Exercice 2 - Solution

1. $(4+5)\cdot 2 = 18$
2. $(3+6)\cdot(4+9) = 117$
3. $(3+6)\cdot(4-9) = -45$
4. $(3+6)/(2+1) = 3$
5. $3+6/(2+1) = 5$
6. $(3+7)/2+2 = 7$
7. $3+6/2+1 = 7$
8. $9-8/(2+2)+5\cdot(4+1) = 32$
9. $(4+5)\cdot 2-4+5\cdot 2 = 24$

Théorie OK Détail

Exercice 3 - Solution

1. $1/3 + \dfrac{8}{3} = 3$
2. $2/3 + 4/5 = \dfrac{22}{15}$
3. $(2/3) \cdot (4/5) = \dfrac{8}{15}$
4. $\dfrac{1}{9} - \dfrac{2}{5} = -\dfrac{13}{45}$
5. $\dfrac{1}{-9} \cdot \dfrac{-3}{5} = \dfrac{1}{15}$
6. $(2/3)/(4/5) = \dfrac{5}{6}$
7. $\dfrac{1 + \dfrac{2}{3}}{1 - \dfrac{2}{7}} = \dfrac{7}{3}$
8. $\dfrac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{9}{4}$
9. $\dfrac{1 + 2 \cdot 3}{5 \cdot 2 + 9/3} = \dfrac{7}{13}$

Théorie OK Détail

Exercice 4 - Solution

1. $2^4 = 16$
2. $(-1)^3 = -1$
3. $5^3 - 2^5 + (-2)^3 = 85$
4. $(1 + 2 \cdot 3)^2 = 49$
5. $2 \cdot 7^2 - 8 \cdot 6^2 = -190$
6. $\sqrt{5 + 2 \cdot 2} = 3$
7. $\sqrt{3^2 + 4 \cdot 4} = 5$
8. $\sqrt{4^3} = 8$
9. $\sqrt[5]{32} = 2$
10. $\sqrt{2/3} \cdot \sqrt{\frac{8}{27}} = \frac{4}{9}$
11. $\sqrt{9} + \sqrt[3]{27} - 5 \cdot \sqrt{81} = -39$

Théorie OK Détail

Exercice 5 - Solution

$$(1+2\cdot 3)^2+2^3\cdot(5-6)^5+2\cdot 3^2-7/8+\frac{\sqrt{\frac{8}{125}}}{\sqrt{\frac{5}{2}}}=\frac{11627}{200}$$

Théorie OK Détail

Exercice 6 - Solution

Théorie OK Détail

Exercice 7 - Solution

La description du calcul peut être résumée par la formule suivante :

$$(((1+2)\cdot 5)^2 + 7 + 2\cdot 3^2)/(4^2 + \sqrt{81}) + 5$$

Le résultat du calcul est 15.

Théorie OK Détail

Arithmétique - Solution détaillée

Exercice 1 - Solution détaillée

Multiplication et division sont des opérations prioritaires, il faut les exécuter avant de faire des additions et des différences ; par conséquent,

1. $1 + 2 \cdot 3 = 1 + 6 = 7$
2. $2 \cdot 8 - 6 = 16 - 6 = 10$
3. $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 6 + 20 = 26$
4. $6 \cdot 7 - 8 \cdot 9 = 42 - 72 = -30$
5. $7 \cdot 3 - 100/4 = 21 - 25 = -4$
6. $6 + 10/2 = 6 + 5 = 11$
7. $200/4/2 = 50/2 = 25$
8. $40/8 - 18/3 = 5 - 6 = -1$

Théorie OK Sol

Exercice 2 - Solution détaillée

On exécute d'abord les opérations entre parenthèses, puis les multiplications, et finalement les additions. Par conséquent,

1. $(4+5)\cdot 2 = 9\cdot 2 = 18$
2. $(3+6)\cdot(4+9) = 9\cdot 13 = 117$
3. $(3+6)\cdot(4-9) = 9\cdot(-5) - 45$
4. $(3+6)/(2+1) = 9/3 = 3$
5. $3+6/(2+1) = 3+6/3 = 3+2 = 5$
6. $(3+7)/2+2 = 10/2+2 = 5+2 = 7$
7. $3+6/2+1 = 3+3+1 = 7$
8. $9-8/(2+2)+5\cdot(4+1) = 9-8/4+5\cdot 5 = 9-2+25 = 32$
9. $(4+5)\cdot 2-4+5\cdot 2 = 9\cdot 2-4+5\cdot 2 = 18-4+10 = 24$

Théorie OK Sol

Exercice 3 - Solution détaillée

1. $1/3 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{3} = \dfrac{9}{3} = 3$
2. $2/3 + 4/5 = \dfrac{10}{15} + \dfrac{12}{15} = \dfrac{22}{15}$
3. $(2/3) \cdot (4/5) = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}$
4. $\dfrac{1}{9} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{5}{45} - \dfrac{18}{45} = \dfrac{5-18}{45} = -\dfrac{13}{45}$
5. $\dfrac{1}{-9} \cdot \dfrac{-3}{5} = \dfrac{1 \cdot (-3)}{(-9) \cdot 5} = \dfrac{-3}{-45} = \dfrac{1}{15}$
6. $(2/3)/(4/5) = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$
7. $\dfrac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{7}} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{7}} = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{7}{5} = \dfrac{35}{15} = \dfrac{7}{3}$
8. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{27}} = \dfrac{2 \cdot 27}{3 \cdot 8} = \dfrac{54}{24} = \dfrac{9}{4}$
9. $\dfrac{1 + 2 \cdot 3}{5 \cdot 2 + 9/3} = \dfrac{1+6}{10+3} = \dfrac{7}{13}$

Théorie OK Sol

Exercice 4 - Solution détaillée

1. $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
2. $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$
3. $5^3 - 2^5 + (-2)^3 = 125 - 32 - 8 = 85$
4. $(1 + 2 \cdot 3)^2 = (1 + 6)^2 = 7^2 = 49$
5. $2 \cdot 7^2 - 8 \cdot 6^2 = 2 \cdot 49 - 8 \cdot 36 = 98 - 288 = -190$
6. $\sqrt{5 + 2 \cdot 2} = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3$
7. $\sqrt{3^2 + 4 \cdot 4} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
8. $\sqrt{4^3} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 4} = \sqrt{64} = 8$
9. $\sqrt[5]{32} = 2$ parce que $2^5 = 32$
10. $\sqrt{2/3} \cdot \sqrt{\frac{8}{27}} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{27}} = \sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}} = \frac{4}{9}$
11. $\sqrt{9} + \sqrt[3]{27} - 5 \cdot \sqrt{81} = 3 + 3 - 5 \cdot 9 = 3 + 3 - 45 = -39$

Théorie OK Sol

Exercice 5 - Solution détaillée

$$
\begin{aligned}
(1+2\cdot 3)^2 \;+\; & 2^3\cdot(5-6)^5+2\cdot 3^2-7/8+\frac{\sqrt{\frac{8}{125}}}{\sqrt{\frac{5}{2}}} \\
&= 7^2+8\cdot(-1)^5+2\cdot 9-\frac{7}{8}+\sqrt{\frac{16}{625}} \\
&= 49-8+18-\frac{7}{8}+\frac{4}{25} \\
&= 59-\frac{7}{8}+\frac{4}{25} \\
&= \frac{59\cdot 200-7\cdot 25+4\cdot 8}{200} \\
&= \frac{11800-175+32}{200}=\frac{11657}{200}
\end{aligned}
$$

Théorie OK Sol

Exercice 6 - Solution détaillée

Théorie OK Sol

Exercice 7 - Solution détaillée

$$\begin{aligned}
(((1+2)\cdot 5)^2 &+ 7+2\cdot 3^2)/(4^2+\sqrt{81})+5 \\
&= ((3\cdot 5)^2+7+2\cdot 9)/(16+9)+5 \\
&= (15^2+7+18)/25+5 \\
&= (225+25)/25+5 \\
&= 10+5 \\
&= 15.
\end{aligned}$$

Théorie OK Sol

Algèbre - Enoncés

Exercice 1 - Enoncé

Simplifiez :

1. $a+(b+c)$
2. $a+(b-c)$
3. $a-(b+c)$
4. $a-(b-c-d)$
5. $a-(-b+c-d)-(a+b)$
6. $-(a+b)+(b-c-d)+(a+b)$
7. $a+b-(b+c-d)-(-c+d)$

Théorie Sol

Exercice 2 - Enoncé

Simplifiez :

1. $(a+b)+(b+c)+(c+2d)$
2. $(a-b)+(b-c)-(c+2d)$
3. $(a+b)-(b+c-d)+(c-2d+a)$
4. $(a+c)+(b+c)+(c-2d)$
5. $-(a+b)-(b+c)-(c-2d)$
6. $-(a+b)+(-b+3c)-(c-2d+3a)$
7. $-2\cdot(a+b)+(-b+3c)-2\cdot(c-2d+3a)$
8. $-(a+b)+2\cdot(-b+3c)-(c-2d+3a)$
9. $-b\cdot(a+b)+a\cdot(-b+3c)-c\cdot(c-2d+3a)$
10. $-a\cdot(a+b)+a\cdot(-b+3c)-a\cdot(c-2d+3a)$

Théorie Sol

Exercice 3 - Enoncé

Simplifiez :

1. $(a+1)\cdot(a+2)$
2. $(a+b)\cdot(a+c)$
3. $(a-b)\cdot(a-c)$
4. $(a+b+1)\cdot(a+2)$
5. $(a+b)\cdot(a+c)+(b+c)\cdot(a+c)$
6. $(a+b)\cdot(a+c)-(b+c)\cdot(a+c)$
7. $(a+b)\cdot(a+c)\cdot(a+2)$
8. $(a+b+c)\cdot(a+c+3)$
9. $(a-b+c)\cdot(a-c+2d)$
10. $(a-b+2)\cdot(a+b-2)\cdot(a-b-2)$

Théorie Sol

Exercice 4 - Enoncé

Calculez :

1. 4^3
2. 4^{-3}
3. $(-4)^{-3}$
4. -4^{-3}
5. $8^{1/3}$
6. $(-32)^{1/5}$
7. $32^{1/2}$
8. $16^{3/4}$
9. $\left(\frac{9}{16}\right)^{1/2}$
10. $\left(\frac{16}{625}\right)^{-3/4}$
11. $(6^{-2})^{-1}$
12. $\frac{1}{5^{-3}}$

Théorie Sol

Exercice 5 - Enoncé

Simplifiez :

1. $(a+5)^2$
2. $(a-2)^2$
3. $(a+2b)^2$
4. $(3a-5b)^2$
5. $(a+b-c)^2$
6. $(a-b-2c)^2$
7. $(a+3b)^3$
8. $(a-2b)^3$
9. $(a-3b+1)^3$
10. $(2a-3b+1)^3$

Théorie Sol

Exercice 6 - Enoncé

Simplifiez :

1. $\frac{a+1}{3}+\frac{b-1}{3}$
2. $\frac{a+1}{2}+\frac{b-1}{3}$
3. $\frac{a+1}{2}-\frac{b-1}{3}$
4. $\frac{a+1}{a-1}+\frac{b-1}{a-1}$
5. $\frac{a+1}{a-1}+\frac{b-1}{a+1}$
6. $\frac{a+1}{b-1}-\frac{b-1}{a+1}$
7. $\frac{a^2-1}{a^2+1}+\frac{a^2-1}{2a}$
8. $-\frac{a+b}{2a}+\frac{b-1}{3}$
9. $(\frac{a+1}{2})^2+\frac{b-1}{3a^2}$
10. $\frac{a+b}{a-b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{a-c}{a+c}$

Théorie Sol

Exercice 7 - Enoncé

Simplifiez :

1. $\frac{a+1}{3} \cdot \frac{b-1}{3}$
2. $\frac{a+1}{2} \cdot \frac{b-1}{3}$
3. $\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-1}{3}\right)^2$
4. $\frac{a+1}{a-1} \cdot \frac{b-1}{a-1}$
5. $\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 + \left(\frac{b-1}{a+1}\right)^2$
6. $\frac{a+1}{b-1} \cdot \frac{b-1}{a+1}$
7. $\frac{a^2-1}{a^2+1} \cdot \frac{a^2-1}{2a}$
8. $-\frac{a+b}{2a} + \left(\frac{b-1}{3}\right)^2$
9. $(\frac{a+1}{2})^2 \cdot \frac{b-1}{3a^2}$
10. $\frac{a+b+c}{a-b+c} \cdot \frac{a+b-c}{a+b-c} - \left(\frac{a-b-c}{a-b-c}\right)^2$

Théorie Sol

Exercice 8 - Enoncé

Simplifiez :

1. $a^{-2} \cdot a^{3} \cdot a^{-1}$
2. $a^{2} b a^{-1} b^{-2} b$
3. $\left(a^{3} b \left(a^{-1} b c^{2}\right)^{-2}\right)^{2}$
4. $\left(\dfrac{a^{-1} b^{3}}{c}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{a^{3} c^{2}}{b^{-2}}\right)^{-1}$
5. $\left(\dfrac{a^{-2} \cdot b^{3} \cdot c}{c^{-2} \cdot a^{3} \cdot b^{-1}}\right)^{-2}$
6. $\dfrac{\left(a^{3} b^{-1}\right)^{2} \left(a^{2} b^{-4}\right)^{-2}}{\left(-a^{2} b^{-4}\right)^{2} \left(-a^{3} b^{-2}\right)^{-3}}$
7. $\dfrac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}}$
8. $\dfrac{\left(\left(a^{2} b^{-1}\right)^{3}\right)^{-2} \left(\left(a^{2} b^{-2}\right)^{2}\right)^{-3}}{\left(-a^{4} b^{3}\right)^{-2} \left(-a^{3} b^{2}\right)^{-3}}$

Théorie Sol

Exercice 9 - Enoncé

Simplifiez :

1. $\sqrt[3]{a^6}$,
   $\sqrt{a^6}$,
   $\sqrt[4]{a^{16}}$,
   $\sqrt[3]{64}$,
   $\sqrt[3]{27}$,
   $\sqrt[5]{2^6 3^5}$,
   $\sqrt[4]{3^6 4^4}$,
   $\sqrt[6]{128}$
2. $\sqrt[3]{a^5 b^3}$,
   $\sqrt{a^2 b^3 c^4}$,
   $\sqrt[3]{a^{10} b^4 c^7}$,
   $\sqrt[4]{a^3 b^4 c^5}$,
   $\sqrt[5]{32 a^7 b^{12}}$,
   $\sqrt[6]{a^{6x} b^{12y} c^{19z}}$
3. $\sqrt[n]{a^{n+2}}$,
   $\sqrt[n]{a^{2n}}$,
   $\sqrt[n]{a^{2n+1}}$,
   $\sqrt[n]{a^{4n+2}}$,
   $\sqrt[n]{a^{n^2}}$,
   $\sqrt[n]{a^{n^2-n}}$,
   $\sqrt[n+1]{a^{n^2+2n+1}}$
4. $\sqrt[3]{\dfrac{a^4}{b^3}}$,
   $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$,

$\sqrt[5]{\dfrac{a^{10}}{b^5}}$,
$\sqrt[3]{\dfrac{a^3}{b^3c^6}}$,
$\sqrt[5]{\dfrac{3^5a^{10}}{b^5}}$,
$\sqrt[5]{\dfrac{a^{12}c^6}{b^7}}$,
$\sqrt[3]{\dfrac{a^{12}c^{11}}{c^2}}$

❺ $\sqrt[3]{16a-24}$,
$\sqrt[3]{27a+54}$,
$\sqrt{a^2+4}$,
$\sqrt[4]{a^2+2ab+b^2}$

❻ $\sqrt{\sqrt[3]{25a^4}}$,
$\sqrt{a\sqrt[5]{a^3}}$,
$\sqrt[3]{\sqrt{(a+b)^9}}$,
$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{30}a^{15}b^{20}}}$,
$\sqrt{\sqrt[4]{2^8a^{16}b^{24}}}$

❼ $\sqrt[4]{16^5}$,
$\sqrt[3]{27^4}$,
$\sqrt[4]{\left(\dfrac{16}{81}\right)^q}$,
$\sqrt[3]{(216b^3)^2}$,
$\sqrt[3]{\left(\dfrac{125}{64}\right)^r}$

❽ $\sqrt{\sqrt[3]{256a^4x^8}}$,
$\sqrt{\sqrt[3]{a^2+2ab+b^2}}$,

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x^{24}y^{36}z^{48}}}}$$

Théorie Sol

Exercice 10 - Enoncé

Calculez et simplifiez :

1. $\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 3\sqrt{a}$,
2. $\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{a^4}$,
3. $\sqrt{9a} - \sqrt{4a} + \sqrt{a}$,
4. $\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$,
5. $\sqrt[6n]{ab} - \sqrt[30n]{a^5b^5}$,
6. $\sqrt[3]{56} - \sqrt[3]{189} + 3\sqrt[3]{448}$,
7. $\sqrt{1100} + \sqrt{44} - \sqrt{99}$,
8. $\sqrt[3]{24a^4} + \sqrt[3]{3a^4b^3} - \sqrt[3]{81ab^6}$,
9. $2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125} - 4\sqrt{20}$,
10. $2\sqrt{24} \cdot 3\sqrt[4]{18} \cdot 4\sqrt[6]{24}$,
11. $\sqrt[5]{54} \cdot 3\sqrt[5]{16} \cdot (-2\sqrt[5]{9})$,
12. $\sqrt{343} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[5]{49}$,
13. $3a\sqrt{2abc} \cdot 2ab\sqrt[6]{ab^5} \cdot 5b \cdot \sqrt[4]{8a^3bc^2}$,
14. $\sqrt{5}(\sqrt{2} - \sqrt{5} + 2\sqrt{10})$,
15. $(\sqrt{14} + \sqrt{21} + 2\sqrt{6}) \cdot \sqrt{42}$,
16. $(6\sqrt[4]{216} + 6\sqrt{6} - 6\sqrt[4]{6} + 6) \cdot (-\sqrt[4]{216})$,
17. $(\sqrt{5} + 2\sqrt[3]{6}) \cdot (\sqrt{5} - 2\sqrt[3]{6})$,
18. $(\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^2$

Théorie Sol

Algèbre - Solutions

Exercice 1 - Solution

1. $a+(b+c)=a+b+c$
2. $a+(b-c)=a+b-c$
3. $a-(b+c)=a-b-c$
4. $a-(b-c-d)=a-b+c+d$
5. $a-(-b+c-d)-(a+b)=-c+d$
6. $-(a+b)+(b-c-d)+(a+b)=b-c-d$
7. $a+b-(b+c-d)-(-c+d)=a$

Théorie OK Détail

Exercice 2 - Solution

1. $(a+b)+(b+c)+(c+2d)=a+2b+2c+2d$
2. $(a-b)+(b-c)-(c+2d)=a-2c-2d$
3. $(a+b)-(b+c-d)+(c-2d+a)=2a-d$
4. $(a+c)+(b+c)+(c-2d)=a+b+3c-2d$
5. $-(a+b)-(b+c)-(c-2d)=-a-2b-2c+2d$
6. $-(a+b)+(-b+3c)-(c-2d+3a)=-4a-2b+2c+2d$
7. $-2\cdot(a+b)+(-b+3c)-2\cdot(c-2d+3a)=-8a-3b+c+4d$
8. $-(a+b)+2\cdot(-b+3c)-(c-2d+3a)=-4a-3b+5c+2d$
9. $-b\cdot(a+b)+a\cdot(-b+3c)-c\cdot(c-2d+3a)=-2ab-b^2-c^2+2cd$
10. $-a\cdot(a+b)+a\cdot(-b+3c)-a\cdot(c-2d+3a)=a\cdot(-4a-2b+2c+2d)$

Théorie OK Détail

Exercice 3 - Solution

1. $(a+1)\cdot(a+2) = a^2+3a+2$
2. $(a+b)\cdot(a+c) = a^2+ab+ac+bc$
3. $(a-b)\cdot(a-c) = a^2-ab-ac+bc$
4. $(a+b+1)\cdot(a+2) = a^2+ab+3a+2b+2$
5. $(a+b)\cdot(a+c)+(b+c)\cdot(a+c) = a^2+2ab+2ac+2bc+c^2$
6. $(a+b)\cdot(a+c)-(b+c)\cdot(a+c) = a^2-c^2$
7. $(a+b)\cdot(a+c)\cdot(a+2) = a^3+a^2b+a^2c+abc+2a^2+2ab+2ac+2bc$
8. $(a+b+c)\cdot(a+c+3) = a^2+ab+2ac+bc+c^2+3a+3b+3c$
9. $(a-b+c)\cdot(a-c+2d) = a^2-ab+bc-c^2+2ad-2bd+2cd$
10. $(a-b+2)\cdot(a+b-2)\cdot(a-b-2)$
$= a^3-a^2b-ab^2+b^3-2a^2+4ab-2b^2-4a-4b+8$

Théorie OK Détail

Exercice 4 - Solution

1. $4^3 = 64$
2. $4^{-3} = \dfrac{1}{64}$
3. $(-4)^{-3} = -\dfrac{1}{64}$
4. $-4^{-3} = -\dfrac{1}{64}$
5. $8^{1/3} = 2$
6. $(-32)^{1/5} = -2$
7. $32^{1/2} = 4\sqrt{2}$
8. $16^{3/4} = 8$
9. $\left(\dfrac{9}{16}\right)^{1/2} = \dfrac{3}{4}$
10. $\left(\dfrac{16}{625}\right)^{-3/4} = \dfrac{125}{8}$
11. $(6^{-2})^{-1} = 36$
12. $\dfrac{1}{5^{-3}} = 125$

Théorie OK Détail

Exercice 5 - Solution

1. $(a+5)^2 = a^2 + 10a + 25$
2. $(a-2)^2 = a^2 - 4a + 4$
3. $(a+2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$
4. $(3a-5b)^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2$
5. $(a+b-c)^2 = a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2$
6. $(a-b-2c)^2 = a^2 - 2ab + b^2 - 4ac + 4bc + 4c^2$
7. $(a+3b)^3 = a^3 + 9a^2b + 27ab^2 + 27b^3$
8. $(a-2b)^3 = a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$
9. $(a-3b+1)^3$
   $= a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3 + 3a^2 - 18ab + 27b^2 + 3a - 9b + 1$
10. $(2a-3b+1)^3$
    $= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 + 12a^2 - 36ab + 27b^2 + 6a - 9b + 1$

Théorie OK Détail

Exercice 6 - Solution

1. $\frac{a+1}{3}+\frac{b-1}{3}=\frac{a+b}{3}$
2. $\frac{a+1}{2}+\frac{b-1}{3}=\frac{3a+2b+1}{6}$
3. $\frac{a+1}{2}-\frac{b-1}{3}=\frac{3a-2b+5}{6}$
4. $\frac{a+1}{a-1}+\frac{b-1}{a-1}=\frac{a+b}{a-1}$
5. $\frac{a+1}{a-1}+\frac{b-1}{a+1}=\frac{a^2+ab+a-b+2}{a^2-1}$
6. $\frac{a+1}{b-1}-\frac{b-1}{a+1}=\frac{a^2+2a-b^2+2b}{(a+1)(b-1)}$
7. $\frac{a^2-1}{a^2+1}+\frac{a^2-1}{2a}=\frac{a^4+2a^3-2a-1}{2a^3+2a}$
8. $-\frac{a+b}{2a}+\frac{b-1}{3}=\frac{2ab-5a-3b}{6a}$
9. $(\frac{a+1}{2})^2+\frac{b-1}{3a^2}=\frac{3a^4+6a^3+3a^2+4b-4}{12a^2}$
10. $\frac{a+b}{a-b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{a-c}{a+c}$
$=\frac{3a^2b+2abc+a^2c-ab^2-ac^2+b^2c+3bc^2}{(a-b)(b+c)(a+c)}$

Théorie OK Détail

Exercice 7 - Solution

Théorie OK Détail

Exercice 8 - Solution

1. $a^{-2} \cdot a^{3} \cdot a^{-1} = 1$
2. $a^{2} b a^{-1} b^{-2} b = a$
3. $\left(a^{3} b \left(a^{-1} b c^{2}\right)^{-2}\right)^{2} = a^{10} b^{-2} c^{-8}$
4. $\left(\dfrac{a^{-1} b^{3}}{c}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{a^{3} c^{2}}{b^{-2}}\right)^{-1} = \dfrac{1}{a b^{8}}$
5. $\left(\dfrac{a^{-2} \cdot b^{3} \cdot c}{c^{-2} \cdot a^{3} \cdot b^{-1}}\right)^{-2} = \dfrac{a^{10}}{b^{8} c^{6}}$
6. $\dfrac{\left(a^{3} b^{-1}\right)^{2} \left(a^{2} b^{-4}\right)^{-2}}{\left(-a^{2} b^{-4}\right)^{2} \left(-a^{3} b^{-2}\right)^{-3}} = -a^{7} b^{8}$
7. $\dfrac{a + b}{a^{-1} + b^{-1}} = ab$
8. $\dfrac{\left(\left(a^{2} b^{-1}\right)^{3}\right)^{-2} \left(\left(a^{2} b^{-2}\right)^{2}\right)^{-3}}{\left(-a^{4} b^{3}\right)^{-2} \left(-a^{3} b^{2}\right)^{-3}} = -\dfrac{b^{30}}{a^{7}}$

Théorie OK Détail

Exercice 9 - Solution

❶
$\sqrt[3]{a^6} = a^2$,
$\sqrt{a^6} = |a|^3$,
$\sqrt[4]{a^{16}} = a^4$,
$\sqrt[3]{64} = 4$,
$\sqrt[3]{27} = 3$,
$\sqrt[5]{2^6 3^5} = 6\sqrt[5]{2}$,
$\sqrt[4]{3^6 4^4} = 12\sqrt{3}$,
$\sqrt[6]{128} = 2\sqrt[6]{2}$

❷
$\sqrt[3]{a^5 b^3} = a \cdot b \cdot a^{2/3}$,
$\sqrt{a^2 b^3 c^4} = |a| \cdot |b| \sqrt{b} \cdot c^2$,
$\sqrt[3]{a^{10} b^4 c^7} = a^3 b c^2 \sqrt[3]{abc}$,
$\sqrt[4]{a^3 b^4 c^5} = bc\sqrt[4]{a^3 c}$,
$\sqrt[5]{32 a^7 b^{12}} = 2ab^2 \sqrt[5]{a^2 b^2}$,
$\sqrt[6]{a^{6x} b^{12y} c^{19z}} = a^x b^{2y} c^{3z} \sqrt[6]{c^z}$

❸
$\sqrt[n]{a^{n+2}} = a\sqrt[n]{a^2}$,
$\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2$,
$\sqrt[n]{a^{2n+1}} = a^2 \sqrt[n]{a}$,
$\sqrt[n]{a^{4n+2}} = a^4 \sqrt[n]{a^2}$,
$\sqrt[n]{a^{n^2}} = a^n$,
$\sqrt[n]{a^{n^2-n}} = a^{n-1}$,
$\sqrt[n+1]{a^{n^2+2n+1}} = a^{n+1}$

❹
$\sqrt[3]{\dfrac{a^4}{b^3}} = \dfrac{a\sqrt[3]{a}}{b}$,
$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,

$\sqrt[5]{\dfrac{a^{10}}{b^5}} = \dfrac{a^2}{b}$,

$\sqrt[3]{\dfrac{a^3}{b^3c^6}} = \dfrac{a}{bc^2}$,

$\sqrt[5]{\dfrac{3^5a^{10}}{b^5}} = \dfrac{3a^2}{b}$,

$\sqrt[5]{\dfrac{a^{12}c^6}{b^7}} = \dfrac{a^2c\sqrt[5]{a^2c}}{b\sqrt[5]{b^2}}$,

$\sqrt[3]{\dfrac{a^{12}c^{11}}{c^2}} = a^{12/3}c^{9/3} = a^4c^3$

❺ $\sqrt[3]{16a-24} = 2\sqrt[3]{2a-3}$,

$\sqrt[3]{27a+54} = 3\sqrt[3]{a+2}$,

$\sqrt{a^2+4}$,

$\sqrt[4]{a^2+2ab+b^2} = \sqrt{a+b}$

❻ $\sqrt{\sqrt[3]{25a^4}} = \sqrt[3]{5a^2}$,

$\sqrt{a\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[5]{a^4}$,

$\sqrt[3]{\sqrt{(a+b)^9}} = (a+b)\sqrt{a+b}$,

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{30}a^{15}b^{20}}} = 4ab\sqrt[3]{b}$,

$\sqrt{\sqrt[4]{2^8a^{16}b^{24}}} = 2a^2b^3$

❼ $\sqrt[4]{16^5} = 32$,

$\sqrt[3]{27^4} = 81$,

$\sqrt[4]{\left(\dfrac{16}{81}\right)^q} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^q$,

$\sqrt[3]{(216b^3)^2} = 36b^2$,

$\sqrt[3]{\left(\dfrac{125}{64}\right)^r} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^r$

❽ $\sqrt{\sqrt[3]{256a^4x^8}} = 2x\sqrt[3]{2a^2x}$,

$\sqrt{\sqrt[3]{a^2+2ab+b^2}} = \sqrt[3]{a+b}$,

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x^{24}y^{36}z^{48}}}} = xyz^2\sqrt{y}$$

Théorie OK Détail

Exercice 10 - Solution

1. $\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = 2\sqrt{a},$
2. $\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{a^4} = (1 + 2a)\sqrt[3]{a},$
3. $\sqrt{9a} - \sqrt{4a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a},$
4. $\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2},$
5. $\sqrt[6n]{ab} - \sqrt[30n]{a^5b^5} = 0,$
6. $\sqrt[3]{56} - \sqrt[3]{189} + 3\sqrt[3]{448} = 11\sqrt[3]{7},$
7. $\sqrt{1100} + \sqrt{44} - \sqrt{99} = 9\sqrt{11},$
8. $\sqrt[3]{24a^4} + \sqrt[3]{3a^4b^3} - \sqrt[3]{81ab^6} = (2a + ab - 3b^2)\sqrt[3]{3a},$
9. $2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125} - 4\sqrt{20} = -9\sqrt{5},$
10. $2\sqrt{24} \cdot 3\sqrt[4]{18} \cdot 4\sqrt[6]{24}$
    $= 288\sqrt[4]{2}\sqrt[6]{3}$
11. $\sqrt[5]{54} \cdot 3\sqrt[5]{16} \cdot (-2\sqrt[5]{9}) = -36$
12. $\sqrt{343} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[5]{49} = 49\sqrt[20]{7^3},$
13. $3a\sqrt{2abc} \cdot 2ab \cdot \sqrt[6]{ab^5} \cdot 5b \cdot \sqrt[4]{8a^3bc^2} = 60\sqrt[2]{2}a^3b^3c\sqrt[12]{a^5b^7}$
14. $\sqrt{5}(\sqrt{2} - \sqrt{5} + 2\sqrt{10}) = \sqrt{10} - 5 + 10\sqrt{2}$
15. $(\sqrt{14} + \sqrt{21} + 2\sqrt{6}) \cdot \sqrt{42} = 14\sqrt{3} + 21\sqrt{2} + 12\sqrt{7}$
16. $(6\sqrt[4]{216} + 6\sqrt{6} - 6\sqrt[4]{6} + 6) \cdot (-\sqrt[4]{216}) = -36\sqrt{6} - 36\sqrt[4]{6} + 36 - 6\sqrt[4]{6^3}$
17. $(\sqrt{5} + 2\sqrt[3]{6}) \cdot (\sqrt{5} - 2\sqrt[3]{6}) = 5 - 4\sqrt[3]{36}$
18. $(\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^2 = 29 - 4\sqrt{30}$

Théorie OK Détail

Algèbre - Solution détaillée

Exercice 1 - Solution détaillée

En reduisant chaque différence à une somme, et en remplaçant les opposés des sommes, on obtient

❶
$$\begin{aligned} & a+(b+c) \\ &= a+b+c \end{aligned}$$

❷
$$\begin{aligned} & a+(b-c) \\ &= a+b+(-c) \\ &= a+b-c \end{aligned}$$

❸
$$\begin{aligned} & a-(b+c) \\ &= a+(-(b+c)) \\ &= a+(-b)+(-c) \\ &= a-b-c \end{aligned}$$

❹
$$\begin{aligned} & a-(b-c-d) \\ &= a+(-(b+(-c)+(-d))) \\ &= a+(-b)+(-(-c))+(-(-d)) \\ &= a-b+c+d \end{aligned}$$

❺
$$\begin{aligned} & a-(-b+c-d)-(a+b) \\ &= a+b-c+d-a-b \\ &= -c+d \end{aligned}$$

❻
$$-(a+b)+(b-c-d)+(a+b)$$

$$= -a - b + b - c - d + a + b$$
$$= b - c - d$$

❼ $a + b - (b + c - d) - (-c + d)$
$$= a + b - b - c + d + c - d$$
$$= a$$

Théorie OK Sol

Exercice 2 - Solution détaillée

❶ $(a+b)+(b+c)+(c+2d)$
$= a+b+b+c+c+2d = a+2b+2c+2d$

❷ $(a-b)+(b-c)-(c+2d)$
$= a-b+b-c-c-2d = a-2c-2d$

❸ $(a+b)-(b+c-d)+(c-2d+a)$
$= a+b-b-c+d+c-2d+a = 2a-d$

❹ $(a+c)+(b+c)+(c-2d)$
$= a+c+b+c+c-2d = a+b+3c-2d$

❺ $-(a+b)-(b+c)-(c-2d)$
$= -a-b-b-c-c+2d = -a-2b-2c+2d$

❻ $-(a+b)+(-b+3c)-(c-2d+3a)$
$= -a-b-b+3c-c+2d-3a = -4a-2b+2c+2d$

❼ $-2\cdot(a+b)+(-b+3c)-2\cdot(c-2d+3a)$
$= -2a-2b-b+3c-2c+4d-6a$
$= -8a-3b+c+4d$

❽ $-(a+b)+2\cdot(-b+3c)-(c-2d+3a)$
$= -a-b-2b+6c-c+2d-3a$
$= -4a-3b+5c+2d$

❾ $-b\cdot(a+b)+a\cdot(-b+3c)-c\cdot(c-2d+3a)$
$= -ab-b^2-ab+3ac-c^2+2cd-3ac$
$= -2ab-b^2-c^2+2cd$

❿ $-a\cdot(a+b)+a\cdot(-b+3c)-a\cdot(c-2d+3a)$
$= -a^2-ab-ab+3ac-ac+2ad-3a^2$
$= -4a^2-2ab+2ac+2ad$
$= a\cdot(-4a-2b+2c+2d)$

Théorie OK Sol

Exercice 3 - Solution détaillée

❶
$$(a+1)\cdot(a+2)$$
$$= a\cdot a + a\cdot 2 + 1\cdot a + 1\cdot 2$$
$$= a^2 + (2+1)\cdot a + 2$$
$$= a^2 + 3a + 2$$

❷
$$(a+b)\cdot(a+c)$$
$$= a^2 + ba + ac + bc$$
$$= a^2 + ab + ac + bc$$

❸
$$(a-b)\cdot(a-c)$$
$$= a^2 - ba - ac + bc$$
$$= a^2 - ab - ac + bc$$

❹
$$(a+b+1)\cdot(a+2)$$
$$= a^2 + ba + a + 2a + 2b + 2$$
$$= a^2 + ab + 3a + 2b + 2$$

❺
$$(a+b)\cdot(a+c) + (b+c)\cdot(a+c)$$
$$= a^2 + ba + ac + bc + ba + ca + bc + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2$$

❻
$$(a+b)\cdot(a+c) - (b+c)\cdot(a+c)$$
$$= a^2 + ab + ac + bc - ab - ac - bc - c^2$$
$$= a^2 - c^2$$

❼
$$(a+b)\cdot(a+c)\cdot(a+2)$$
$$= (a+b)\cdot(a^2 + ac + 2a + 2c)$$
$$= a^3 + a^2b + a^2c + abc + 2a^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

❽
$$(a+b+c)\cdot(a+c+3)$$
$$= a^2 + ba + ca + ac + bc + c^2 + 3a + 3b + 3c$$
$$= a^2 + ab + 2ac + bc + c^2 + 3a + 3b + 3c$$

❾ $(a-b+c)\cdot(a-c+2d)$
$= a^2 - ab + ac - ac + bc - c^2 + 2ad - 2bd + 2cd$
$= a^2 - ab + bc - c^2 + 2ad - 2bd + 2cd$

❿ $(a-b+2)\cdot(a+b-2)\cdot(a-b-2)$
$= (a-b+2)(a^2+ab-2a-ab-b^2+2b-2a-2b+4)$
$= (a-b+2)(a^2-b^2-4a+4)$
$= a^3 - a^2b + 2a^2 - ab^2 + b^3 - 2b^2 - 4a^2 + 4ab - 8a + 4a - 4b + 8$
$= a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - 2a^2 + 4ab - 2b^2 - 4a - 4b + 8$

Théorie OK Sol

Exercice 4 - Solution détaillée

❶ $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

❷ $4^{-3} = (4^3)^{-1} = \dfrac{1}{64}$

❸ $(-4)^{-3} = \dfrac{1}{(-4)^3} = \dfrac{1}{-64} = -\dfrac{1}{64}$

❹ $-4^{-3} = -\dfrac{1}{4^3} = -\dfrac{1}{64}$

❺ $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$

❻ $(-32)^{1/5} = \sqrt[5]{-32} = -2$

❼ $32^{1/2} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

❽ $16^{3/4} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$

❾ $\dfrac{\left(\frac{9}{16}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \sqrt{9}}{\sqrt{16} = \frac{3}{4}}$

❿ $\left(\dfrac{16}{625}\right)^{-3/4} = \left(\sqrt[4]{\dfrac{16}{625}}\right)^{-3} = \left(\dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{625}}\right)^{-3}$

$= \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\dfrac{2^3}{5^3}\right)^{-1} = \left(\dfrac{8}{125}\right)^{-1} = \dfrac{125}{8}$

⓫ $(6^{-2})^{-1} = 6^{(-2)\cdot(-1)} = 6^2 = 36$

⓬ $\dfrac{1}{5^{-3}} = (5^{-3})^{-1} = 5^{(-3)\cdot(-1)} = 5^3 = 125$

Théorie OK Sol

Exercice 5 - Solution détaillée

❶ $(a+5)^2$
$= a^2 + 2 \cdot a \cdot 5 + 5^2$
$= a^2 + 10a + 25$

❷ $(a-2)^2$
$= a^2 + 2 \cdot a \cdot (-2) + (-2)^2$
$= a^2 - 4a + 4$

❸ $(a+2b)^2$
$= a^2 + 2 \cdot a \cdot 2b + (2b)^2$
$= a^2 + 4ab + 4b^2$

❹ $(3a-5b)^2$
$= (3a)^2 + 2 \cdot (3a) \cdot (-5b) + (-5b)^2$
$= 9a^2 - 30ab + 25b^2$

❺ $(a+b-c)^2$
$= a^2 + 2 \cdot a \cdot (b-c) + (b-c)^2$
$= a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2$

❻ $(a-b-2c)^2$
$= ((a-b)-(2c))^2$
$= (a-b)^2 - 2 \cdot (a-b) \cdot (2c) + (2c)^2$
$= a^2 - 2ab + b^2 - 4ac + 4bc + 4c^2$

❼ $(a+3b)^3$
$= a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 3b + 3 \cdot a \cdot (3b)^2 + (3b)^3$
$= a^3 + 9a^2b + 27ab^2 + 27b^3$

❽ $(a-2b)^3$
$= a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot (-2b) + 3 \cdot a \cdot (-2b)^2 + (-2b)^3$
$= a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$

❾ $(a-3b+1)^3$
$= (a-3b)^3 + 3(a-3b)^2 + 3(a-3b) + 1$
$= a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3 + 3a^2 - 18ab + 27b^2 + 3a - 9b + 1$

❿ $(2a-3b+1)^3$
$= (2a-3b)^3 + 3(2a-3b)^2 + 3(2a-3b) + 1$
$= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 + 12a^2 - 36ab + 27b^2 + 6a - 9b + 1$

Théorie OK Sol

Exercice 6 - Solution détaillée

❶
$$\frac{a+1}{3}+\frac{b-1}{3}$$
$$=\frac{(a+1)+(b-1)}{3}=\frac{a+b}{3}$$

❷
$$\frac{a+1}{2}+\frac{b-1}{3}$$
$$=\frac{3(a+1)}{6}+\frac{2(b-1)}{6}$$
$$=\frac{3a+3+2b-2}{6}=\frac{3a+2b+1}{6}$$

❸
$$\frac{a+1}{2}-\frac{b-1}{3}$$
$$=\frac{3(a+1)-2(b-1)}{6}$$
$$=\frac{3a-2b+5}{6}$$

❹
$$\frac{a+1}{a-1}+\frac{b-1}{a-1}$$
$$=\frac{(a+1)+(b-1)}{a-1}$$
$$=\frac{a+b}{a-1}$$

❺
$$\frac{a+1}{a-1}+\frac{b-1}{a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a+1)+(b-1)(a-1)}{(a-1)(a+1)}$$
$$=\frac{a^2+2a+1+ab-a-b+1}{a^2-1}$$
$$=\frac{a^2+ab+a-b+2}{a^2-1}$$

❻ $\dfrac{a+1}{b-1}-\dfrac{b-1}{a+1}$

$=\dfrac{(a+1)^2-(b-1)^2}{(a+1)(b-1)}$

$=\dfrac{a^2+2a-b^2+2b}{(a+1)(b-1)}$

❼ $\dfrac{a^2-1}{a^2+1}+\dfrac{a^2-1}{2a}$

$=\dfrac{2a(a^2-1)+(a^2+1)(a^2-1)}{2a(a^2+1)}$

$=\dfrac{a^4+2a^3-2a-1}{2a^3+2a}$

❽ $-\dfrac{a+b}{2a}+\dfrac{b-1}{3}$

$=\dfrac{-3a-3b+2ab-2a}{6a}$

$=\dfrac{2ab-5a-3b}{6a}$

❾ $(\dfrac{a+1}{2})^2+\dfrac{b-1}{3a^2}$

$=\dfrac{(a+1)^2}{4}+\dfrac{b-1}{3a^2}$

$=\dfrac{3a^2(a+1)^2+4(b-1)}{12a^2}$

$=\dfrac{3a^4+6a^3+3a^2+4b-4}{12a^2}$

❿ $\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{a-c}{a+c}$

$=\dfrac{(a+b)(b+c)(a+c)}{(a-b)(b+c)(a+c)}+\dfrac{(b-c)(a-b)(a+c)}{(a-b)(b+c)(a+c)}+\dfrac{(a-c)(a-b)(b+c)}{(a-b)(b+c)(a+c)}$

$=\dfrac{(a+b)(b+c)(a+c)+(b-c)(a-b)(a+c)+(a-c)(a-b)(b+c)}{(a-b)(b+c)(a+c)}$

$=\dfrac{3a^2b+2abc+a^2c-ab^2-ac^2+b^2c+3bc^2}{(a-b)(b+c)(a+c)}$

Théorie OK Sol

Exercice 7 - Solution détaillée

Théorie OK Sol

Exercice 8 - Solution détaillée

❶ $a^{-2} \cdot a^3 \cdot a^{-1} = a^{-2+3+(-1)} = a^0 = 1$

❷ $a^2 b a^{-1} b^{-2} b = a^{2-1} b^{1+(-2)+1}$

$= a^1 b^0 = a$

❸ $\left(a^3 b \left(a^{-1} b c^2\right)^{-2}\right)^2$

$= \left(a^3 b \left(a^{(-1)\cdot(-2)} b^{-2} c^{2\cdot(-2)}\right)\right)^2$

$= \left(a^3 b \left(a^2 b^{-2} c^{-4}\right)\right)^2$

$= \left(a^{3+2} b^{1+(-2)} c^{-4}\right)^2$

$= a^{5\cdot 2} b^{(-1)\cdot 2} c^{(-4)\cdot 2} = a^{10} b^{-2} c^{-8}$

❹ $\left(\frac{a^{-1} b^3}{c}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a^3 c^2}{b^{-2}}\right)^{-1}$

$= \frac{a^{(-1)\cdot(-2)} b^{3\cdot(-2)}}{c^{1\cdot -2}} \cdot \frac{a^{3\cdot -1} c^{2\cdot -1}}{b^{(-2)\cdot(-1)}}$

$= \frac{a^2 b^{-6} a^{-3} c^{-2}}{c^{-2} b^2} = a^2 b^{-6} a^{-3} c^{-2} c^2 b^{-2}$

$= a^{2-3} b^{-6-2} c^{-2+2} = a^{-1} b^{-8} = \frac{1}{a b^8}$

❺ $\left(\frac{a^{-2} \cdot b^3 \cdot c}{c^{-2} \cdot a^3 \cdot b^{-1}}\right)^{-2}$

$= \left(a^{-2} \cdot b^3 \cdot c \cdot c^2 \cdot a^{-3} \cdot b\right)^{-2}$

$= \left(a^{-5} \cdot b^4 \cdot c^3\right)^{-2}$

$= a^{10} \cdot b^{-8} \cdot c^{-6} = \frac{a^{10}}{b^8 c^6}$

❻ $\frac{\left(a^3 b^{-1}\right)^2 \left(a^2 b^{-4}\right)^{-2}}{\left(-a^2 b^{-4}\right)^2 \left(-a^3 b^{-2}\right)^{-3}}$

$$= \frac{a^6 b^{-2} a^{-4} b^8}{(-1)^2 a^4 b^{-8} (-1)^{-3} a^{-9} b^6}$$
$$= \frac{a^2 b^6}{a^{-5} b^{-2} (-1)}$$
$$= -a^7 b^8$$

❼
$$\frac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}}$$
$$= \frac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$
$$= \frac{a+b}{\frac{b+a}{ab}}$$
$$= \frac{(a+b)ab}{b+a=ab}$$

❽
$$\frac{\left((a^2 b^{-1})^3\right)^{-2} \left((a^2 b^{-2})^2\right)^{-3}}{(-a^4 b^3)^{-2} (-a^3 b^2)^{-3}}$$
$$= \frac{(a^6 b^{-3})^{-2} (a^4 b^{-4})^{-3}}{(-1)^{-2} a^{-8} b^{-6} (-1)^{-3} a^{-9} b^{-6}}$$
$$= \frac{a^{-12} b^6 a^{-12} b^{12}}{-a^{-17} b^{-12}} = -a - 24 b^{18} a^{17} b^{12} = -a^{-7} b^{30} = -\frac{b^{30}}{a^7}$$

Théorie OK Sol

Exercice 9 - Solution détaillée

❶
$$\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2,$$
$$\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = |a^3| = |a|^3,$$
$$\sqrt[4]{a^{16}} = (a^{16})^{1/4} = a^{16/4} = a^4,$$
$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4,$$
$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3,$$
$$\sqrt[5]{2^6 3^5} = \sqrt[5]{2^5 3^5} = \sqrt[5]{2}\sqrt[5]{2^5}\sqrt[5]{3^5} = \sqrt[5]{2} \cdot 2 \cdot 3 = 6\sqrt[5]{2},$$
$$\sqrt[4]{3^6 4^4} = \sqrt[4]{3^2 3^4 4^4} = \sqrt[4]{3^2} \cdot 3 \cdot 4 = 12\sqrt[4]{3^2} = 12 \cdot 3^{2/4} = 12 \cdot 3^{1/2} = 12\sqrt{3},$$
$$\sqrt[6]{128} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^2 2^6} = 2\sqrt[6]{2}$$

❷
$$\sqrt[3]{a^5 b^3} = \sqrt[3]{a^2 a^3 b^3} = \sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{a^2} \cdot a \cdot b = a \cdot b \cdot \sqrt[3]{a^2} = a \cdot b \cdot a^{2/3},$$
$$\sqrt{a^2 b^3 c^4} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^3}\sqrt{c^4} = |a|\sqrt{b^2 b} c^2 = |a| \cdot |b|\sqrt{b} \cdot c^2,$$
$$\sqrt[3]{a^{10} b^4 c^7} = a^{10/3} b^{4/3} c^{7/3} = a^{3+1/3} b^{1+1/3} c^{2+1/3} = a^3 a^{1/3} b b^{1/3} c^2 c^{1/3} = a^3 b c^2 \sqrt[3]{abc},$$
$$\sqrt[4]{a^3 b^4 c^5} = a^{3/4} b^{4/4} c^{5/4} = a^{3/4} b c c^{1/4} = bc\sqrt[4]{a^3}\sqrt[4]{c} = bc\sqrt[4]{a^3 c},$$
$$\sqrt[5]{32 a^7 b^{12}} = \sqrt[5]{32} a^{7/5} b^{12/5} = 2a a^{2/5} b^2 b^{2/5} = 2ab^2\sqrt[5]{a^2 b^2},$$
$$\sqrt[6]{a^{6x} b^{12y} c^{19z}} = a^{6x/6} b^{12y/6} c^{19z/6} = a^x b^{2y} c^{18z/6 + z/6} = a^x b^{2y} c^{3z} c^{z/6} = a^x b^{2y} c^{3z}\sqrt[6]{c^z}$$

❸
$$\sqrt[n]{a^{n+2}} = \sqrt[n]{a^n a^2} = a\sqrt[n]{a^2},$$
$$\sqrt[n]{a^{2n}} = \sqrt[n]{(a^2)^n} = a^2,$$
$$\sqrt[n]{a^{2n+1}} = \sqrt[n]{a(a^2)^n} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{(a^2)^n} = a^2\sqrt[n]{a},$$
$$\sqrt[n]{a^{4n+2}} = \sqrt[n]{a^2(a^4)^n} = a^4\sqrt[n]{a^2},$$
$$\sqrt[n]{a^{n^2}} = \sqrt[n]{a^{n \cdot n}} = \sqrt[n]{(a^n)^n} = a^n,$$
$$= (a^{n^2})^{1/n} = a^{\frac{n^2}{n}} = a^n,$$
$$\sqrt[n]{a^{n^2-n}} = \sqrt[n]{\frac{a^{n^2}}{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n^2}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{a^n}{a} = a^{n-1},$$
$$= a^{\frac{n^2-n}{n}} = a^{n-1},$$

$\sqrt[n+1]{a^{n^2+2n+1}} = \sqrt[n+1]{a^{(n+1)^2}} = a^{\frac{(n+1)^2}{n+1}} = a^{n+1}$

❹ $\sqrt[3]{\dfrac{a^4}{b^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{b^3}} = \dfrac{a\sqrt[3]{a}}{b}$,

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,

$\sqrt[5]{\dfrac{a^{10}}{b^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{a^{10}}}{\sqrt[5]{b^5}} = \dfrac{a^2}{b}$,

$\sqrt[3]{\dfrac{a^3}{b^3c^6}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{b^3}\sqrt[3]{c^6}} = \dfrac{a}{bc^2}$,

$\sqrt[5]{\dfrac{3^5a^{10}}{b^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^5a^{10}}}{\sqrt[5]{b^5}} = \dfrac{3a^2}{b}$,

$\sqrt[5]{\dfrac{a^{12}c^6}{b^7}} = \sqrt[5]{a^{12}c^6b^{-7}} = a^{12/5}b^{-7/5}c^{6/5}$

$= a^{2+2/5}b^{-1-2/5}c^{1+1/5} = a^2a^{2/5}b^{-1}b^{-2/5}cc^{1/5} = \dfrac{a^2c\sqrt[5]{a^2c}}{b\sqrt[5]{b^2}}$,

$\sqrt[3]{\dfrac{a^{12}c^{11}}{c^2}} = \sqrt[3]{a^{12}c^{11-2}} = a^{12/3}c^{9/3} = a^4c^3$

❺ $\sqrt[3]{16a-24} = \sqrt[3]{8(2a-3)} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2a-3} = 2\sqrt[3]{2a-3}$,

$\sqrt[3]{27a+54} = \sqrt[3]{27(a+2)} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{a+2} = 3\sqrt[3]{a+2}$,

$\sqrt{a^2+4}$,

$\sqrt[4]{a^2+2ab+b^2} = \sqrt[4]{(a+b)^2} = (a+b)^{2/4} = (a+b)^{1/2} = \sqrt{a+b}$

❻ $\sqrt{\sqrt[3]{25a^4}} = \sqrt[3]{\sqrt{25a^4}} = \sqrt[3]{5a^2}$,

$\sqrt{a\sqrt[5]{a^3}} = (aa^{3/5})^{1/2} = (a^{1+3/5})^{1/2} = (a^{8/5})^{1/2} = a^{8/10} = a^{4/5} = \sqrt[5]{a^4}$,

$\sqrt[3]{\sqrt{(a+b)^9}} = \sqrt{\sqrt[3]{(a+b)^9}} = \sqrt{(a+b)^3} = (a+b)^{3/2}$

$= (a+b)^{1+1/2} = (a+b)\sqrt{a+b}$,

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{30}a^{15}b^{20}}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{30}}}\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{15}}}\sqrt[5]{\sqrt[3]{b^{20}}} = \sqrt[5]{2^{10}}\sqrt[5]{a^5}\sqrt[3]{\sqrt[5]{b^{20}}} = 2^2a\sqrt[3]{b^4} = 4ab\sqrt[3]{b}$,

$\sqrt{\sqrt[4]{2^8a^{16}b^{24}}} = \left(\left(2^8a^{16}b^{24}\right)^{1/4}\right)^{1/2} = \left(2^8a^{16}b^{24}\right)^{1/8} = 2a^2b^3$

❼ $\sqrt[4]{16^5} = (\sqrt[4]{16})^5 = 2^5 = 32$,

$$\sqrt[3]{27^4} = 27^{4/3} = 27^{1+1/3} = 27\sqrt[3]{27} = 27 \cdot 3 = 81,$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{16}{81}\right)^q} = \left(\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}}\right)^q = \left(\frac{2}{3}\right)^q,$$

$$\sqrt[3]{(216b^3)^2} = \left(\sqrt[3]{2^3 3^3 b^3}\right)^2 = (6b)^2 = 36b^2,$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{125}{64}\right)^r} = \left(\sqrt[3]{\frac{125}{64}}\right)^r = \left(\frac{5}{4}\right)^r$$

❽ $$\sqrt{\sqrt[3]{256a^4x^8}} = \left(2^8 a^4 x^8\right)^{1/6} = 2^{8/6} a^{4/6} x^{8/6}$$

$$= 2^{4/3} a^{2/3} x^{4/3} = 22^{1/3} a^{2/3} x x^{1/3} = 2x\sqrt[3]{2a^2 x},$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^2 + 2ab + b^2}} = \sqrt[6]{(a+b)^2} = (a+b)^{2/6} = (a+b)^{1/3} = \sqrt[3]{a+b},$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x^{24} y^{36} z^{48}}}} = \left(x^{24} y^{36} z^{48}\right)^{1/24} = x^{24/24} y^{36/24} z^{48/24} = xy^{3/2} z^2 = xyz^2\sqrt{y}$$

Théorie OK Sol

Exercice 10 - Solution détaillée

❶ $\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 3\sqrt{a}$
$= \sqrt{a}(1 - 2 + 3) = 2\sqrt{a},$

❷ $\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{a^4}$
$= \sqrt[3]{a} + 2a\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a}(1 + 2a)$
$= (1 + 2a)\sqrt[3]{a},$

❸ $\sqrt{9a} - \sqrt{4a} + \sqrt{a}$
$= \sqrt{9}\sqrt{a} - \sqrt{4}\sqrt{a} + \sqrt{a} = 3\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + \sqrt{a}$
$= (3 - 2 + 1)\sqrt{a} = 2\sqrt{a},$

❹ $\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$
$= \sqrt[3]{2^4} + 3\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - 2\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 2\sqrt[3]{2} + 9\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2}$
$= (2 + 9 - 10)\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2},$

❺ $\sqrt[6n]{ab} - \sqrt[30n]{a^5b^5}$
$= a^{\frac{1}{6n}}b^{\frac{1}{6n}} - (a^5)^{\frac{1}{30n}}(b^5)^{\frac{1}{30n}} = a^{\frac{1}{6n}}b^{\frac{1}{6n}} - a^{\frac{1}{6n}}b^{\frac{1}{6n}} = 0,$

❻ $\sqrt[3]{56} - \sqrt[3]{189} + 3\sqrt[3]{448}$
$= \sqrt[3]{7 \cdot 2^3} - \sqrt[3]{7 \cdot 3^3} + 3\sqrt[3]{7 \cdot 2^6} = 2\sqrt[3]{7} - 3\sqrt[3]{7} + 12\sqrt[3]{7} = 11\sqrt[3]{7},$

❼ $\sqrt{1100} + \sqrt{44} - \sqrt{99}$
$= \sqrt{11 \cdot 10^2} + \sqrt{11 \cdot 2^2} - \sqrt{11 \cdot 3^2} = \sqrt{11}(10 + 2 - 3) = 9\sqrt{11},$

❽ $\sqrt[3]{24a^4} + \sqrt[3]{3a^4b^3} - \sqrt[3]{81ab^6}$
$= \sqrt[3]{3 \cdot 2^3a^4} + \sqrt[3]{3a^4b^3} - \sqrt[3]{3^4ab^6} = 2a\sqrt[3]{3a} + ab\sqrt[3]{3a} - 3b^2\sqrt[3]{3a}$
$= (2a + ab - 3b^2)\sqrt[3]{3a},$

❾ $2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125} - 4\sqrt{20}$
$= 2\sqrt{5 \cdot 3^2} - 3\sqrt{5 \cdot 4^2} + \sqrt{5 \cdot 5^2} - 4\sqrt{5 \cdot 2^2}$
$= 6\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 8\sqrt{5} = (6 - 12 + 5 - 8)\sqrt{5} = -9\sqrt{5},$

❿ $2\sqrt{24} \cdot 3\sqrt[4]{18} \cdot 4\sqrt[6]{24}$

$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{2 \cdot 3^2} \cdot \sqrt[6]{2^3 \cdot 3}$
$= 24 \cdot 2^{\frac{3}{2}} 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} 3^{\frac{2}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{6}} 3^{\frac{1}{6}} = 24 \cdot 2^{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{1}{6}}$
$= 24 \cdot 2^{\frac{9}{4}} \cdot 3^{\frac{7}{6}} = 24 \cdot 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{6}}$
$= 288 \sqrt[4]{2} \sqrt[6]{3}$

11 $\sqrt[5]{54} \cdot 3\sqrt[5]{16} \cdot (-2\sqrt[5]{9})$
$= 3 \cdot (-2) \cdot \sqrt[5]{2 \cdot 3^3} \cdot \sqrt[5]{2^4} \cdot \sqrt[5]{3^2}$
$= -6 \cdot \sqrt[5]{2 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^2} = -6 \cdot \sqrt[5]{2^5 \cdot 3^5} = -6 \cdot 2 \cdot 3 = -36$

12 $\sqrt{343} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[5]{49}$
$= \sqrt{7^3} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[5]{7^2} = 7^{\frac{3}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{2}{5}}$
$= 7^{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}} = 7^{\frac{43}{20}} = 7^2 \cdot 7^{\frac{3}{20}} = 49 \sqrt[20]{7^3},$

13 $3a\sqrt{2abc} \cdot 2ab \cdot \sqrt[6]{ab^5} \cdot 5b \cdot \sqrt[4]{8a^3bc^2}$
$= 3a \cdot 2ab \cdot 5b \cdot 2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{5}{6}} \cdot 2^{3\frac{1}{4}} a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{4}} c^{\frac{2}{4}}$
$= 30a^2b^2 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+\frac{1}{4}} c^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}}$
$= 30a^2b^2 2^{\frac{5}{4}} a^{\frac{17}{12}} b^{\frac{19}{12}} c = 30a^2b^2 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} a \cdot a^{\frac{5}{12}} b \cdot b^{\frac{7}{12}} c$
$= 60 \sqrt[2]{2} a^3 b^3 c \sqrt[12]{a^5 b^7}$

14 $\sqrt{5}(\sqrt{2} - \sqrt{5} + 2\sqrt{10})$
$= \sqrt{5}\sqrt{2} - \sqrt{5}\sqrt{5} + 2\sqrt{5}\sqrt{10}$
$= \sqrt{10} - \sqrt{25} + 2\sqrt{50} = \sqrt{10} - 5 + 2\sqrt{2 \cdot 5^2} = \sqrt{10} - 5 + 10\sqrt{2}$

15 $(\sqrt{14} + \sqrt{21} + 2\sqrt{6}) \cdot \sqrt{42}$
$= \sqrt{14}\sqrt{42} + \sqrt{21}\sqrt{42} + 2\sqrt{6}\sqrt{42} = \sqrt{14 \cdot 42} + \sqrt{21 \cdot 42} + 2\sqrt{6 \cdot 42}$
$= \sqrt{2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} + sqrt3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 + 2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}$
$= 2 \cdot 7\sqrt{3} + 3 \cdot 7\sqrt{2} + 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{7} = 14\sqrt{3} + 21\sqrt{2} + 12\sqrt{7}$

16 $(6\sqrt[4]{216} + 6\sqrt{6} - 6\sqrt[4]{6} + 6) \cdot (-\sqrt[4]{216})$
$= (6\sqrt[4]{6^3} + 6\sqrt{6} - 6\sqrt[4]{6} + 6) \cdot (-\sqrt[4]{6^3})$
$= -6 \cdot (6^{\frac{3}{4}} + 6^{\frac{1}{2}} - 6^{\frac{1}{4}} + 1) \cdot 6^{\frac{3}{4}}$
$= -6 \cdot (6^{\frac{6}{4}} + 6^{\frac{5}{4}} - 6^{\frac{4}{4}} + 6^{\frac{3}{4}})$
$= -6 \cdot (6 \cdot 6^{\frac{1}{2}} + 6 \cdot 6^{\frac{1}{4}} - 6 + 6^{\frac{3}{4}})$
$= -6 \cdot (6\sqrt{6} + 6\sqrt[4]{6} - 6 + \sqrt[4]{6^3})$
$= -36\sqrt{6} - 36\sqrt[4]{6} + 36 - 6\sqrt[4]{6^3}$

17 $(\sqrt{5} + 2\sqrt[3]{6}) \cdot (\sqrt{5} - 2\sqrt[3]{6})$

$= \sqrt{5}^2 - (2\sqrt[3]{6})^2 = 5 - 4\sqrt[3]{6^2} = 5 - 4\sqrt[3]{36}$

⓲ $(\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^2$

$= \sqrt{5}^2 - 4\sqrt{5}\sqrt{6} + 4\sqrt{6}^2$

$= 5 - 4\sqrt{30} + 24 = 29 - 4\sqrt{30}$

Théorie OK Sol

Polynômes - Enoncés

Exercice 1 - Enoncé

Considérons les polynômes suivants :

$$A = x^2 + 3x + 5, \qquad B = x^2 + 5x + 3.$$

Calculez :

$A + B$, $A - B$,
A^2, $A \cdot B$, B^2,
$A^2 - 2AB + B^2$, $(A + B)^2$,
A^3, B^3, $A \cdot B^2$

Théorie Sol

Exercice 2 - Enoncé

Considérons les polynômes suivants :

$$A = 5x^3 - 3x^2 + 5x - 7, \qquad B = 3x^2 + 5x + 3.$$

Calculez :

$A + B$, $A - B$,
A^2, $A \cdot B$, B^2,
$A^2 - B^3$

Théorie Sol

Exercice 3 - Enoncé

Divisez le polynôme D par d :

1. $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = x - 2;$
2. $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = x + 4;$
3. $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = x + 1;$
4. $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = -x - 3;$
5. $D = x^3 + 3x^2 + 5x - 7, \quad d = x - 2;$
6. $D = x^3 + 3x^2 + 5x - 7, \quad d = x + 1;$
7. $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = x - 2;$
8. $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = x + \frac{1}{2};$
9. $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = 2x - 1;$
10. $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x - 1;$
11. $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x + 1;$
12. $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x - \frac{1}{2};$
13. $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x + \frac{1}{2};$
14. $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = 2x + 3;$
15. $D = x^3 + 2x + 1, \quad d = x - 1;$
16. $D = x^3 + 2x + 1, \quad d = 1 + x;$
17. $D = x - x^3 - 7 + 5x^2, \quad d = 1 + x;$
18. $D = 1 - x^4 + 5x^2, \quad d = 2 - x;$
19. $D = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \quad d = x - 1;$
20. $D = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \quad d = x + 1;$

Théorie
Sol

Exercice 4 - Enoncé

Divisez le polynôme D par d :

1. $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = x^2 - x + 2;$
2. $D = 3x^2 + 2x + 1, \quad d = x^2 - x + 2;$
3. $D = 4x^2 - 4x + 8, \quad d = 2x^2 - 3x + 4;$
4. $D = -3x^2 - 2x + 9, \quad d = 3x^2 + 1;$
5. $D = x^2 + 3x + 5, \quad d = x^2 - 2;$
6. $D = x^2 + 5, \quad d = x^2 + x + 2;$
7. $D = x^2 + 6x, \quad d = x^2 + 2x;$
8. $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = x^2 - 2x + 8;$
9. $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = 2x^2 - 3x + 1;$
10. $D = x^3 - 2x + 1, \quad d = x^2 - 3x;$
11. $D = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1, \quad d = x^2 - 2x + 5;$
12. $D = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1, \quad d = x^2 - 2;$
13. $D = x^4 - 2x^3 - 2x + 1, \quad d = x^3 - 2x + 1;$
14. $D = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1, \quad d = x^4 - 5$
15. $D = x^4 - 3x^3 + 5x^2, \quad d = x^4 + x^3 - 5$

Théorie Sol

Exercice 5 - Enoncé

Décomposez en facteurs :

1. $ax + 3x$,
2. $x^3 - 4x^2$,
3. $x^2y - xy^2$,
4. $18x^5 - 12x^3$,
5. $16a^2x^2 - 4ax^2$,
6. $15x^3 - 10x^2 + 5x$,
7. $14a^3b^2 + 35a^2b^3 - 28a^4b$,
8. $(a - b)x + (a - b)y$,
9. $(x - 5)x + (5 - x)y$,
10. $2a(-x - y) - 7(x + y)$

Théorie Sol

Exercice 6 - Enoncé

Décomposez en facteurs :

1. $x^2 - 25$,
2. $4a^2 - 1$,
3. $49x^2 - 9y^2$,
4. $x^3y - xy^3$,
5. $8a^2 - 18$,
6. $a^4 - 1$,
7. $x^4 - 81$,
8. $2x^5 - 32x$,
9. $(x - y)^2 - 9$,
10. $x^2 - (y + 2)^2$,

Théorie Sol

Exercice 7 - Enoncé

Décomposez en facteurs :

1. $x^3 - 8$,
2. $a^3 + 1$,
3. $y^3 - 27$,
4. $27x^3 + 8$,
5. $27 + x^6$,
6. $27x^3 + \frac{1}{27}$,
7. $x^4 - x$,
8. $a^6 - b^6$,
9. $64 - x^6$,
10. $x^7 - x$

Théorie Sol

Exercice 8 - Enoncé

Décomposez en facteurs :

1. $9x^2 + 24x + 16$,
2. $x^2 - 4x + 4$,
3. $4x^2 + 1 - 4x$,
4. $1 + 4x^2 + 4x^4$,
5. $x^3 + 2x^2 + x$,
6. $10x - 25 - x^2$,
7. $1 - 4x^2 + 4x^4$,
8. $x^6 + 2x^3 + 1$,
9. $x^7 - 2x^4 + x$,
10. $x^8 - 8x^4 + 16$,
11. $2a^6 - 4a^3b^2 + 2b^4$,
12. $2a^6 - 64a^3 + 512$

Théorie Sol

Exercice 9 - Enoncé

Décomposez en facteurs :

1. $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$,
2. $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$,
3. $2a^3b - 6a^2bc + 6abc^2 - 2bc^3$,
4. $x^6 - x^5 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{27}x^3$,
5. $-64b^3 - 12b + 1 + 48b^2$

Théorie Sol

Exercice 10 - Enoncé

Décomposez en facteurs :

1. $xy + ax + 2y + 2a$,
2. $x^2 - 3xy - 2ax + 6ay$,
3. $ax - x - a + 1$,
4. $6x^2 - 6y + 4x - 9xy$,
5. $a^2bx - ab^2 - ax^2 + bx$
6. $x^2 - 4 + xy + 2y$,
7. $a^2 - 2a - 2b - b^2$,
8. $x + y + x^3 + y^3$,
9. $x^3 - y^3 + x^2 - y^2$,
10. $x^5 - x^3y^2 + x^2y^3 - y^5$
11. $a^3 - 2a^2 - b^3 + 2b^2$,
12. $x^2 + 6x + 9 - y^2$,
13. $4x^2 - 25 - 4xy + y^2$,
14. $a^2 + b^2 - 2ab - c^2$,
15. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 8$,
16. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 8x^3$,
17. $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$

Théorie Sol

Polynômes - Solutions

Exercice 1 - Solution

$$
\begin{aligned}
A+B &= 2x^2+8x+8,\\
A-B &= -2x+2,\\
A^2 &= x^4+6x^3+19x^2+30x+25\\
A\cdot B &= x^4+8x^3+23x^2+34x+15,\\
B^2 &= x^4+10x^3+31x^2+30x+9,\\
A^2-2AB+B^2 &= 4x^2-8x+4,\\
(A+B)^2 &= 4x^4+32x^3+96x^2+128x+64,\\
A^3 &= x^6+9x^5+42x^4+117x^3+210x^2+225x+125,\\
B^3 &= x^6+15x^5+84x^4+215x^3+252x^2+135x+27,\\
A\cdot B^2 &= x^6+13x^5+66x^4+173x^3+254x^2+177x+45.
\end{aligned}
$$

Théorie OK Détail

Exercice 2 - Solution

$$
\begin{aligned}
A+B &= 5x^3+10x-4,\\
A-B &= 5x^3-6x^2-10,\\
A^2 &= 25x^6-30x^5+59x^4-100x^3+67x^2-70x+49,\\
A\cdot B &= 15x^5+16x^4+15x^3-5x^2-20x-21,\\
B^2 &= 9x^4+30x^3+43x^2+30x+9,\\
A^2-B^3 &= -2x^6-165x^5-247x^4-495x^3-239x^2-205x+22.
\end{aligned}
$$

Théorie OK Détail

Exercice 3 - Solution

❶ $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = x - 2;$
$Q = x + 4, \quad R = 9;$

❷ $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = x + 4;$
$Q = x - 2, \quad R = 9;$

❸ $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = x + 1;$
$Q = x + 1, \quad R = 0;$

❹ $D = x^2 + 2x + 1, \quad d = -x - 3;$
$Q = -x + 1, \quad R = 4;$

❺ $D = x^3 + 3x^2 + 5x - 7, \quad d = x - 2;$
$Q = x^2 + 5x + 15, \quad R = 23;$

❻ $D = x^3 + 3x^2 + 5x - 7, \quad d = x + 1;$
$Q = x^2 + 2x + 3, \quad R = -10;$

❼ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = x - 2;$
$Q = x^2 + 6x + 10, \quad R = 21;$

❽ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = x + \frac{1}{2};$
$Q = x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{15}{4}, \quad R = \frac{23}{8};$

❾ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad d = 2x - 1;$
$Q = \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{1}{8}, \quad R = \frac{9}{8};$

❿ $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x - 1;$
$Q = x^3 + 2x^2 + 3x + 4, \quad R = 5;$

⓫ $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x + 1;$
$Q = x^3 + x, \quad R = 1;$

⓬ $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x - \frac{1}{2};$
$Q = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{15}{8}, \quad R = \frac{31}{16};$

⓭ $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = x + \frac{1}{2};$
$Q = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{8}, \quad R = \frac{11}{16};$

⓮ $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad d = 2x + 3;$
$Q = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{8}x - \frac{13}{16}, \quad R = \frac{55}{16};$

⓯ $D = x^3 + 2x + 1, \quad d = x - 1;$
$Q = x^2 + x + 3, \quad R = 4;$

⓰ $D = x^3 + 2x + 1, \quad d = 1 + x;$
$Q = x^2 - x + 3, \quad R = -2;$

⓱ $D = x - x^3 - 7 + 5x^2, \quad d = 1 + x;$
$Q = -x^2 + 6x - 5, \quad R = -2;$

⓲ $D = 1 - x^4 + 5x^2, \quad d = 2 - x;$
$Q = x^3 + 2x^2 - x - 2, \quad R = 5;$

⓳ $D = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \quad d = x - 1;$
$Q = x^3 + 5x^2 + 11x + 15, \quad R = 16;$

⓴ $D = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \quad d = x + 1;$
$Q = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad R = 0;$

Théorie OK Détail

Exercice 4 - Solution

1. $Q = 1; \quad R = 3x - 1;$
2. $Q = 3; \quad R = 5x - 5;$
3. $Q = 2; \quad R = 2x;$
4. $Q = -1; \quad R = -2x + 10;$
5. $Q = 1; \quad R = 3x + 7;$
6. $Q = 1; \quad R = -x + 3;$
7. $Q = 1; \quad R = 4x;$
8. $Q = x + 6; \quad R = 2x - 47;$
9. $Q = \frac{1}{2}x + \frac{11}{4}; \quad R = \frac{23}{4}x - \frac{7}{4};$
10. $Q = x + 3; \quad R = 7x + 1;$
11. $Q = x^2 - 2; \quad R = -6x + 11;$
12. $Q = x^2 - 2x + 5; \quad R = -6x + 11;$
13. $Q = x - 2; \quad R = 2x^2 - 7x + 3;$
14. $Q = 1; \quad R = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 6;$
15. $Q = 1; \quad R = -4x^3 + 5x^2 + 5;$

Théorie OK Détail

Exercice 5 - Solution

1. $ax + 3x = (a + 3)x$
2. $x^3 - 4x^2 = (x - 4)x^2$
3. $x^2y - xy^2 = (x - y)xy$
4. $18x^5 - 12x^3 = 6x^3(3x^2 - 2)$
5. $16a^2x^2 - 4ax^2 = 4ax^2(4a - 1)$
6. $15x^3 - 10x^2 + 5x = 5x(3x^2 - 2x + 1)$
7. $14a^3b^2 + 35a^2b^3 - 28a^4b = 7a^2b(4a^2 + 2ab + 5b^2)$
8. $(a - b)x + (a - b)y = (a - b)(x + y)$
9. $(x - 5)x + (5 - x)y = (x - 5)(x - y)$
10. $2a(-x - y) - 7(x + y) = -(2a + 7)(x + y)$

Théorie OK Détail

Exercice 6 - Solution

1. $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$
2. $4a^2 - 1 = (2a-1)(2a+1)$
3. $49x^2 - 9y^2 = (7x-3y)(7x+3y)$
4. $x^3y - xy^3 = xy(x-y)(x+y)$
5. $8a^2 - 18 = 2(2a-3)(2a+3)$
6. $a^4 - 1 = (a-1)(a+1)(a^2+1)$
7. $x^4 - 81 = (x-3)(x+3)(x^2+9)$
8. $2x^5 - 32x = 2x(x-2)(x+2)(x^2+4)$
9. $(x-y)^2 - 9 = (x-y-3)(x-y+3)$
10. $x^2 - (y+2)^2 = (x-y-2)(x+y+2)$

Théorie OK Détail

Exercice 7 - Solution

1. $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$
2. $a^3 + 1 = (a+1)(a^2-a+1)$
3. $y^3 - 27 = (y-3)(y^2+3y+9)$
4. $27x^3 + 8 = (3x+2)(9x^2-6x+4)$
5. $27 + x^6 = (3+x^2)(9-3x^2+x^4)$
6. $27x^3 + \frac{1}{27} = (3x + \frac{1}{3})(9x^2 - x + \frac{1}{9})$
7. $x^4 - x = x(x-1)(x^2+x+1)$
8. $a^6 - b^6 = (a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$
9. $64 - x^6 = (2-x)(4+2x+x^2)(2+x)(4-2x+x^2)$
10. $x^7 - x = x(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

Théorie OK Détail

Exercice 8 - Solution

1. $9x^2 + 24x + 16 = (3x + 4)^2$
2. $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$
3. $4x^2 + 1 - 4x = (2x - 1)^2$
4. $1 + 4x^2 + 4x^4 = (1 + 2x^2)^2$
5. $x^3 + 2x^2 + x = x(x + 1)^2$
6. $10x - 25 - x^2 = -(x - 5)^2$
7. $1 - 4x^2 + 4x^4 = (1 - \sqrt{2}x)^2(1 + \sqrt{2}x)^2$
8. $x^6 + 2x^3 + 1 = (x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2$
9. $x^7 - 2x^4 + x = x(x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2$
10. $x^8 - 8x^4 + 16 = (x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2(x^2 + 2)^2$
11. $2a^6 - 4a^3b^2 + 2b^4 = 2(a^3 - b^2)^2$
12. $2a^6 - 32a^3 + 128 = 2(a - 2)^2(a^2 + 2a + 4)^2$

Théorie OK Détail

Exercice 9 - Solution

1. $a^3 + 6a^2 + 12a + 8 = (a+2)^3$
2. $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3 = (x-3y)^3$
3. $2a^3b - 6a^2bc + 6abc^2 - 2bc^3 = 2b(a-c)^3$
4. $x^6 - x^5 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{27}x^3 = \frac{1}{27}x^3(3x-1)^3$
5. $-64b^3 - 12b + 1 + 48b^2 = (1-3b)^3$

Théorie OK Détail

Exercice 10 - Solution

❶	$xy + ax + 2y + 2a$	$= (x + 2)(y + a)$
❷	$x^2 - 3xy - 2ax + 6ay$	$= (x - 2a)(x - 3y)$
❸	$ax - x - a + 1$	$= (x - 1)(a - 1)$
❹	$6x^2 - 6y + 4x - 9xy$	$= (2 + 3x)(2x - 3y)$
❺	$a^2bx - ab^2 - ax^2 + bx$	$= (ab - x)(ax - b)$
❻	$x^2 - 4 + xy + 2y$	$= (x + 2)(x + y - 2)$
❼	$a^2 - 2a - 2b - b^2$	$= (a + b)(a - b - 2)$
❽	$x + y + x^3 + y^3$	$= (x + y)(x^2 - xy + y^2 + 1)$
❾	$x^3 - y^3 + x^2 - y^2$	$= (x - y)(x^2 + xy + y^2 + x + y)$
❿	$x^5 - x^3y^2 + x^2y^3 - y^5$	$= (x + y)^2(x - y)(x^2 - xy + y^2)$
⓫	$a^3 - 2a^2 - b^3 + 2b^2$	$= (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 2a - 2b)$
⓬	$x^2 + 6x + 9 - y^2$	$= (x - y + 3)(x + y + 3)$
⓭	$4x^2 - 25 - 4xy + y^2$	$= (2x - y - 5)(2x - y + 5)$
⓮	$a^2 + b^2 - 2ab - c^2$	$= (a - b - c)(a - b + c)$
⓯	$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 8$	$= (x + y - 2)(x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 4)$
⓰	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 8x^3$	$= -(x - 1)(7x^2 + 4x + 1)$
⓱	$x^4 + 1$	$= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

Théorie OK Détail

Polynômes - Solution détaillée

Exercice 1 - Solution détaillée

$$
\begin{aligned}
A+B &= (x^2+3x+5)+(x^2+5x+3)\\
&= (1+1)x^2+(3+5)x+(5+3)\\
&= 2x^2+8x+8,\\
A-B &= (x^2+3x+5)-(x^2+5x+3)\\
&= (x^2+3x+5)+(-x^2-5x-3)\\
&= (1-1)x^2+(3-5)x+(5-3)\\
&= 0x^2+(-2)x+2 = -2x+2,\\
A^2 &= (x^2+3x+5)^2\\
&= (x^2+3x+5)\cdot(x^2+3x+5)\\
&= x^2\cdot x^2+3x\cdot x^2+5\cdot x^2\\
&\quad +x^2\cdot 3x+3x\cdot 3x+5\cdot 3x\\
&\quad +x^2\cdot 5+3x\cdot 5+5\cdot 5\\
&= x^4+3x^3+5x^2+3x^3+9x^2+15x+5x^2+15x+25\\
&= x^4+6x^3+19x^2+30x+25\\
A\cdot B &= (x^2+3x+5)\cdot(x^2+5x+3)\\
&= x^2\cdot x^2+3x\cdot x^2+5\cdot x^2\\
&\quad +x^2\cdot 5x+3x\cdot 5x+5\cdot 5x\\
&\quad +x^2\cdot 3+3x\cdot 3+5\cdot 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x^3 + 15x^2 + 25x + 3x^2 + 9x + 15 \\
& = x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 34x + 15, \\
B^2 \qquad & = (x^2 + 5x + 3) \cdot (x^2 + 5x + 3) \\
& = x^2 \cdot x^2 + 5x \cdot x^2 + 3 \cdot x^2 \\
& \quad + x^2 \cdot 5x + 5x \cdot 5x + 3 \cdot 5x \\
& \quad + x^2 \cdot 3 + 5x \cdot 3 + 3 \cdot 3 \\
& = x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x^3 + 25x^2 + 15x + 3x^2 + 15x + 9 \\
& = x^4 + 10x^3 + 31x^2 + 30x + 9, \\
A^2 - 2AB + B^2 \quad & = (x^4 + 6x^3 + 19x^2 + 30x + 25) \\
& \quad - 2(x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 34x + 15) \\
& \quad + (x^4 + 10x^3 + 31x^2 + 30x + 9) \\
& = (1 - 2 + 1)x^4 + (6 - 16 + 10)x^3 + (19 - 46 + 31)x^2 + (30 - 68 + 30)x + \\
& = 4x^2 - 8x + 4, \\
(A + B)^2 \qquad & = (2x^2 + 8x + 8)^2 \\
& = 4x^4 + 16x^3 + 16x^2 + 16x^3 + 64x^2 + 64x + 16x^2 + 64x + 64 \\
& = 4x^4 + 32x^3 + 96x^2 + 128x + 64, \\
A^3 \qquad & = A \cdot A^2 \\
& = (x^2 + 3x + 5) \cdot (x^4 + 6x^3 + 19x^2 + 30x + 25) \\
& = x^6 + 9x^5 + 42x^4 + 117x^3 + 210x^2 + 225x + 125, \\
B^3 \qquad & = B \cdot B^2 \\
& = (x^2 + 5x + 3) \cdot (x^4 + 10x^3 + 31x^2 + 30x + 9) \\
& = x^6 + 15x^5 + 84x^4 + 215x^3 + 252x^2 + 135x + 27, \\
A \cdot B^2 \qquad & = (x^2 + 3x + 5) \cdot (x^4 + 10x^3 + 31x^2 + 30x + 9) \\
& = x^6 + 13x^5 + 66x^4 + 173x^3 + 254x^2 + 177x + 45.
\end{aligned}
$$

Théorie OK Sol

Exercice 2 - Solution détaillée

$$
\begin{aligned}
A+B &= (5x^3-3x^2+5x-7)+(3x^2+5x+3)\\
&= (5+0)x^3+(-3+3)x^2+(5+5)x+(-7+3)\\
&= 5x^3+0x^2+10x+(-4)\\
&= 5x^3+10x-4,\\
A-B &= (5x^3-3x^2+5x-7)-(3x^2+5x+3)\\
&= (5x^3-3x^2+5x-7)+(-3x^2-5x-3)\\
&= (5-0)x^3+(-3-3)x^2+(5-5)x+(-7-3)\\
&= 5x^3+(-6)x^2+0x+(-10)\\
&= 5x^3-6x^2-10,\\
A^2 &= (5x^3-3x^2+5x-7)^2\\
&= (5x^3-3x^2+5x-7)\cdot(5x^3-3x^2+5x-7)\\
&= 25x^6-15x^5+25x^4-35x^3\\
&\quad -15x^5+9x^4-15x^3+21x^2\\
&\quad +25x^4-15x^3+25x^2-35x\\
&\quad -35x^3+21x^2-35x+49\\
&= 25x^6-30x^5+59x^4-100x^3+67x^2-70x+49,\\
A\cdot B &= (5x^3-3x^2+5x-7)\cdot(3x^2+5x+3)\\
&= 15x^5-9x^4+15x^3-21x^2\\
&\quad +25x^4-15x^3+25x^2-35x\\
&\quad +15x^3-9x^2+15x-21\\
&= 15x^5+16x^4+15x^3-5x^2-20x-21,\\
B^2 &= (3x^2+5x+3)^2\\
&= (3x^2+5x+3)\cdot(3x^2+5x+3)\\
&= 9x^4+15x^3+9x^2+15x^3+25x^2+15x+9x^2+15x+9\\
&= 9x^4+30x^3+43x^2+30x+9,\\
A^2-B^3 &= (5x^3-3x^2+5x-7)^2-(3x^2+5x+3)^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (25x^6 - 30x^5 + 59x^4 - 100x^3 + 67x^2 - 70x + 49) \\
&\quad -(27x^6 + 135x^5 + 306x^4 + 395x^3 + 306x^2 + 135x + 27) \\
&= -2x^6 - 165x^5 - 247x^4 - 495x^3 - 239x^2 - 205x + 22.
\end{aligned}
$$

Théorie OK Sol

Exercice 3 - Solution détaillée

❶ $D = x^2 + 2x + 1$, $d = x - 2$;

Horner :

	1	2	1
2		2	8
	1	4	9

Euclides :

$$\begin{array}{rrrrrrr|rrr} & x^2 & + & 2x & + & 1 & & x & - & 2 \\ \cline{8-10} -(& x^2 & - & 2x &) & & & x & + & 4 \\ \cline{1-6} & & & 4x & + & 1 & & & & \\ & & -(& 4x & - & 8 &) & & & \\ \cline{1-6} & & & & & 9 & & & & \end{array}$$

❷ $D = x^2 + 2x + 1$, $d = x + 4$;

Horner :

	1	2	1
-4		-4	8
	1	-2	9

Euclides :

$$\begin{array}{rrrrrrr|rrr} & x^2 & + & 2x & + & 1 & & x & + & 4 \\ \cline{8-10} -(& x^2 & + & 4x &) & & & x & - & 2 \\ \cline{1-6} & & & -2x & + & 1 & & & & \\ & & -(& -2x & - & 8 &) & & & \\ \cline{1-6} & & & & & 9 & & & & \end{array}$$

❸ $D = x^2 + 2x + 1$, $d = x + 1$;

Horner :

	1	2	1
-1		-1	-1
	1	1	0

Euclides :

$$
\begin{array}{rrrrrrr|rrr}
 & x^2 & + & 2x & + & 1 & & x & + & 1 \\ \cline{8-10}
-(& x^2 & + & x &) & & & x & + & 1 \\ \cline{1-7}
 & & & x & + & 1 & & & & \\
 & & -(& x & + & 1 &) & & & \\ \cline{1-7}
 & & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

❹ $D = x^2 + 2x + 1$, $d = -x - 3$;

Euclides :

$$
\begin{array}{rrrrrrr|rrrr}
 & x^2 & + & 2x & + & 1 & & - & x & - & 3 \\ \cline{8-11}
-(& x^2 & + & 3x &) & & & - & x & + & 1 \\ \cline{1-7}
 & & & -x & + & 1 & & & & & \\
 & & -(& -x & - & 3 &) & & & & \\ \cline{1-7}
 & & & & & 4 & & & & &
\end{array}
$$

❺ $D = x^3 + 3x^2 + 5x - 7$, $d = x - 2$;

Horner :

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 3 & 5 & -7 \\
2 & & 2 & 10 & 30 \\ \hline
 & 1 & 5 & 15 & 23
\end{array}
$$

Euclides :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|rrrrr}
 & x^3 & + & 3x^2 & + & 5x & - & 7 & & x & - & 2 & & \\ \cline{11-15}
-(& x^3 & - & 2x^2 &) & & & & & x^2 & + & 5x & + & 15 \\ \cline{1-9}
 & & & 5x^2 & + & 5x & - & 7 & & & & & & \\
 & & -(& 5x^2 & - & 10x &) & & & & & & & \\ \cline{1-9}
 & & & & & 15x & - & 7 & & & & & & \\
 & & & & -(& 15x & - & 30 &) & & & & & \\ \cline{1-9}
 & & & & & & & 23 & & & & & &
\end{array}
$$

❻ $D = x^3 + 3x^2 + 5x - 7$, $d = x + 1$;

Horner :

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 3 & 5 & -7 \\
-1 & & -1 & -2 & -3 \\ \hline
 & 1 & 2 & 3 & -10
\end{array}
$$

Euclides :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|rrrrr}
 & x^3 & + & 3x^2 & + & 5x & - & 7 & & x & + & 1 & \\
\cline{10-13}
-(& x^3 & + & x^2 &) & & & & & x^2 & + & 2x & + & 3 \\
\cline{1-9}
 & & & 2x^2 & + & 5x & - & 7 & & & & & & \\
 & & -(& 2x^2 & + & 2x &) & & & & & & & \\
\cline{1-9}
 & & & & & 3x & - & 7 & & & & & & \\
 & & & & -(& 3x & + & 3 &) & & & & & \\
\cline{1-9}
 & & & & & & & -10 & & & & & &
\end{array}
$$

❼ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$, $d = x - 2$;

Horner :

	1	4	-2	1
2		2	12	20
	1	6	10	21

Euclides :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|rrrrr}
 & x^3 & + & 4x^2 & - & 2x & + & 1 & & x & - & 2 & \\
\cline{10-13}
-(& x^3 & - & 2x^2 &) & & & & & x^2 & + & 6x & + & 10 \\
\cline{1-9}
 & & & 6x^2 & - & 2x & + & 1 & & & & & & \\
 & & -(& 6x^2 & - & 12x &) & & & & & & & \\
\cline{1-9}
 & & & & & 10x & + & 1 & & & & & & \\
 & & & & -(& 10x & - & 20 &) & & & & & \\
\cline{1-9}
 & & & & & & & 21 & & & & & &
\end{array}
$$

❽ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$, $d = x + \frac{1}{2}$;

Horner :

	1	4	-2	1
$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$
	1	$\frac{7}{2}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{23}{8}$

Euclides :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|rrrrr}
 & x^3 & + & 4x^2 & - & 2x & + & 1 & & x & + & \frac{1}{2} & \\
\cline{10-13}
-(& x^3 & + & \frac{1}{2}x^2 &) & & & & & x^2 & + & \frac{7}{2}x & - & \frac{15}{4} \\
\cline{1-9}
 & & & \frac{7}{2}x^2 & - & 2x & + & 1 & & & & & & \\
 & & -(& \frac{7}{2}x^2 & + & \frac{7}{4}x &) & & & & & & & \\
\cline{1-9}
 & & & & & -\frac{15}{4}x & + & 1 & & & & & & \\
 & & & & -(& -\frac{15}{4}x & - & \frac{15}{8} &) & & & & & \\
\cline{1-9}
 & & & & & & & \frac{23}{8} & & & & & &
\end{array}
$$

❾ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$, $d = 2x - 1$;

Euclides :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & x^3 & + & 4x^2 & - & 2x & + & 1 & & 2x - 1 \\
\cline{10-10}
-(& x^3 & - & \frac{1}{2}x^2 &) & & & & & \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{1}{8} \\
\cline{1-9}
 & & & \frac{9}{2}x^2 & - & 2x & + & 1 & & \\
 & & -(& \frac{9}{2}x^2 & - & \frac{9}{4}x &) & & & \\
\cline{1-9}
 & & & & & \frac{1}{4}x & + & 1 & & \\
 & & & & -(& \frac{1}{4}x & - & \frac{1}{8} &) & \\
\cline{1-9}
 & & & & & & & \frac{9}{8} & &
\end{array}
$$

10 $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,\ d = x - 1\,;$

Horner :

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}
$$

Euclides :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & x^4 & + & x^3 & + & x^2 & + & x & + & 1 & x - 1 \\
\cline{11-11}
-(& x^4 & - & x^3 &) & & & & & & x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \\
\cline{1-10}
 & & & 2x^3 & + & x^2 & + & x & + & 1 & \\
 & & -(& 2x^3 & - & 2x^2 &) & & & & \\
\cline{1-10}
 & & & & & 3x^2 & + & x & + & 1 & \\
 & & & & -(& 3x^2 & - & 3x &) & & \\
\cline{1-10}
 & & & & & & & 4x & + & 1 & \\
 & & & & & & -(& 4x & - & 4 &) \\
\cline{1-10}
 & & & & & & & & & 5 &
\end{array}
$$

11 $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,\ d = x + 1\,;$

Horner :

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & & -1 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

Euclides :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & x^4 & + & x^3 & + & x^2 & + & x & + & 1 & x + 1 \\
\cline{11-11}
-(& x^4 & + & x^3 &) & & & & & & x^3 + x \\
\cline{1-10}
 & & & & + & x^2 & + & x & + & 1 & \\
 & & & & -(& x^2 & + & x &) & & \\
\cline{1-10}
 & & & & & & & & & 1 &
\end{array}
$$

12 $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,\ d = x - \frac{1}{2}\,;$

Horner :

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{7}{8} & \frac{15}{16} \\ \hline & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} & \frac{15}{8} & \frac{31}{16} \end{array}$$

Euclides :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & x^4 & + & x^3 & + & x^2 & + & x & + & 1 & \\ -(& x^4 & - & \frac{1}{2}x^3 &) & & & & & & \\ \hline & & & \frac{3}{2}x^3 & + & x^2 & + & x & + & 1 & \\ & & -(& \frac{3}{2}x^3 & - & \frac{3}{4}x^2 &) & & & & \\ \hline & & & & & \frac{7}{4}x^2 & + & x & + & 1 & \\ & & & & -(& \frac{7}{4}x^2 & - & \frac{7}{8}x &) & & \\ \hline & & & & & & & \frac{15}{8}x & + & 1 & \\ & & & & & & -(& \frac{15}{8}x & - & \frac{15}{16} &) \\ \hline & & & & & & & & & \frac{31}{16} & \end{array} \qquad \left| \begin{array}{rcrcrcr} x & - & \frac{1}{2} & & & & \\ \hline x^3 & + & \frac{3}{2}x^2 & + & \frac{7}{4}x & + & \frac{15}{8} \end{array} \right.$$

13 $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $d = x + \frac{1}{2}$;

Horner :

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{5}{16} \\ \hline & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{11}{16} \end{array}$$

Euclides :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & x^4 & + & x^3 & + & x^2 & + & x & + & 1 & \\ -(& x^4 & + & \frac{1}{2}x^3 &) & & & & & & \\ \hline & & & \frac{1}{2}x^3 & + & x^2 & + & x & + & 1 & \\ & & -(& \frac{1}{2}x^3 & + & \frac{1}{4}x^2 &) & & & & \\ \hline & & & & & \frac{3}{4}x^2 & + & x & + & 1 & \\ & & & & -(& \frac{3}{4}x^2 & + & \frac{3}{8}x &) & & \\ \hline & & & & & & & \frac{5}{8}x & + & 1 & \\ & & & & & & -(& \frac{5}{8}x & + & \frac{5}{16} &) \\ \hline & & & & & & & & & \frac{11}{16} & \end{array} \qquad \left| \begin{array}{rcrcrcr} x & + & \frac{1}{2} & & & & \\ \hline x^3 & + & \frac{1}{2}x^2 & + & \frac{3}{4}x & + & \frac{5}{8} \end{array} \right.$$

14 $D = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $d = 2x + 3$;

Euclides :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr|l}
 & x^4 & + & x^3 & + & x^2 & + & x & + & 1 & 2x + 3 \\
\cline{10-10}
-(& x^4 & + & \frac{3}{2}x^3 &) & & & & & & \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{8}x - \frac{13}{16} \\
\cline{1-9}
 & & & -\frac{1}{2}x^3 & + & x^2 & + & x & + & 1 & \\
 & & -(& -\frac{1}{2}x^3 & - & \frac{3}{4}x^2 &) & & & & \\
\cline{1-9}
 & & & & & \frac{7}{4}x^2 & + & x & + & 1 & \\
 & & & & -(& \frac{7}{4}x^2 & + & \frac{21}{8}x &) & & \\
\cline{1-9}
 & & & & & & & -\frac{13}{8}x & + & 1 & \\
 & & & & & & -(& -\frac{13}{8}x & - & \frac{39}{16} &) \\
\cline{1-9}
 & & & & & & & & & \frac{55}{16} &
\end{array}
$$

15 $D = x^3 + 2x + 1$, $d = x - 1$;

Horner :

	1	0	2	1
1		1	1	3
	1	1	3	4

Euclides :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr|l}
 & x^3 & & & + & 2x & + & 1 & & x - 1 \\
\cline{10-10}
-(& x^3 & - & x^2 &) & & & & & x^2 + x + 3 \\
\cline{1-9}
 & & & x^2 & + & 2x & + & 1 & & \\
 & & -(& x^2 & - & x &) & & & \\
\cline{1-9}
 & & & & & 3x & + & 1 & & \\
 & & & & -(& 3x & - & 3 &) & \\
\cline{1-9}
 & & & & & & & 4 & &
\end{array}
$$

16 $D = x^3 + 2x + 1$, $d = x + 1$;

Horner :

	1	0	2	1
-1		-1	1	-3
	1	-1	3	-2

Euclides :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr|l}
 & x^3 & & & + & 2x & + & 1 & & x + 1 \\
\cline{10-10}
-(& x^3 & + & x^2 &) & & & & & x^2 - x + 3 \\
\cline{1-9}
 & & & -x^2 & + & 2x & + & 1 & & \\
 & & -(& -x^2 & - & x &) & & & \\
\cline{1-9}
 & & & & & 3x & + & 1 & & \\
 & & & & -(& 3x & + & 3 &) & \\
\cline{1-9}
 & & & & & & & -2 & &
\end{array}
$$

17 $D = x - x^3 - 7 + 5x^2 = -x^3 + 5x^2 + x - 7$, $d = 1 + x = x + 1$;

Horner :

	-1	5	1	-7
-1		1	-6	5
	-1	6	-5	-2

Euclides :

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|rrrrr}
 & -x^3 & + & 5x^2 & + & x & - & 7 & & x & + & 1 & \\
\cline{10-13}
-(& -x^3 & - & x^2 &) & & & & & -x^2 & + & 6x & - & 5 \\
\cline{1-9}
 & & & 6x^2 & + & x & - & 7 & & & & & & \\
 & & -(& 6x^2 & + & 6x &) & & & & & & & \\
\cline{1-9}
 & & & & & -5x & - & 7 & & & & & & \\
 & & & & -(& -5x & - & 5 &) & & & & & \\
\cline{1-9}
 & & & & & & & -2 & & & & & &
\end{array}$$

18 $D = 1 - x^4 + 5x^2 = -x^4 + 5x^2 + 1$, $d = 2 - x = -x + 2$;

Euclides :

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr|rrrrrr}
 & -x^4 & & & + & 5x^2 & & & + & 1 & & -x & + & 2 & & \\
\cline{12-17}
-(& -x^4 & + & 2x^3 &) & & & & & & & x^3 & + & 2x^2 & - & x & - & 2 \\
\cline{1-11}
 & & & -2x^3 & + & 5x^2 & & & + & 1 & & & & & & & \\
 & & -(& -2x^3 & + & 4x^2 &) & & & & & & & & & & \\
\cline{1-11}
 & & & & & x^2 & & & + & 1 & & & & & & & \\
 & & & & -(& x^2 & - & 2x &) & & & & & & & & \\
\cline{1-11}
 & & & & & & & 2x & + & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & -(& 2x & - & 4 &) & & & & & & \\
\cline{1-11}
 & & & & & & & & & 5 & & & & & & & \\
\end{array}$$

19 $D = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, $d = x - 1$;

Horner :

	1	4	6	4	1
1		1	5	11	15
	1	5	11	15	16

Euclides :

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr|rrrrrrr}
 & x^4 & + & 4x^3 & + & 6x^2 & + & 4x & + & 1 & & & x & - & 1 & & & \\
\cline{15-19}
-(& x^4 & - & x^3 &) & & & & & & & & x^3 & + & 5x^2 & + & 11x & + & 15 \\
\cline{1-13}
 & & & 5x^3 & + & 6x^2 & + & 4x & + & 1 & & & & & & & & & \\
 & & -(& 5x^3 & - & 5x^2 &) & & & & & & & & & & & & \\
\cline{1-13}
 & & & & & 11x^2 & + & 4x & + & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & -(& 11x^2 & - & 11x &) & & & & & & & & & & \\
\cline{1-13}
 & & & & & & & 15x & + & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & -(& 15x & - & 15 &) & & & & & & & & \\
\cline{1-13}
 & & & & & & & & & 16 & & & & & & & & & \\
\end{array}$$

20 $D = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1,\ d = x + 1\,;$

Horner :

	1	4	6	4	1
-1		-1	-3	-3	-1
	1	3	3	1	0

Euclides :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr|l}
 & x^4 & + & 4x^3 & + & 6x^2 & + & 4x & + & 1 & & & x + 1 \\
-(& x^4 & + & x^3 &) & & & & & & & & \overline{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \\
\hline
 & & & 3x^3 & + & 6x^2 & + & 4x & + & 1 & & & \\
 & & -(& 3x^3 & + & 3x^2 &) & & & & & & \\
\hline
 & & & & & 3x^2 & + & 4x & + & 1 & & & \\
 & & & & -(& 3x^2 & + & 3x &) & & & & \\
\hline
 & & & & & & & x & + & 1 & & & \\
 & & & & & & -(& x & + & 1 &) & & \\
\hline
 & & & & & & & & & 0 & & &
\end{array}
$$

Théorie OK Sol

Exercice 4 - Solution détaillée

❶ $D = x^2 + 2x + 1$, $d = x^2 - x + 2$;

Euclides :

$$\begin{array}{rcl|l} x^2 + 2x + 1 & & & x^2 - x + 2 \\ \hline -(\ x^2 - x + 2\ ) & & & 1 \\ \hline 3x - 1 & & & \end{array}$$

❷ $D = 3x^2 + 2x + 1$, $d = x^2 - x + 2$;

Euclides :

$$\begin{array}{rcl|l} 3x^2 + 2x + 1 & & & x^2 - x + 2 \\ \hline -(\ 3x^2 - 3x + 6\ ) & & & 3 \\ \hline 5x - 5 & & & \end{array}$$

❸ $D = 4x^2 - 4x + 8$, $d = 2x^2 - 3x + 4$;

Euclides :

$$\begin{array}{rcl|l} 4x^2 - 4x + 8 & & & 2x^2 - 3x + 4 \\ \hline -(\ 4x^2 - 6x + 8\ ) & & & 2 \\ \hline 2x & & & \end{array}$$

❹ $D = -3x^2 - 2x + 9$, $d = 3x^2 + 1$;

Euclides :

$$\begin{array}{rcl|l} -3x^2 - 2x + 9 & & & 3x^2 + 1 \\ \hline -(\ -3x^2 - 1\ ) & & & -1 \\ \hline -2x + 10 & & & \end{array}$$

❺ $D = x^2 + 3x + 5$, $d = x^2 - 2$;

Euclides :

$$\begin{array}{rcl|l} x^2 + 3x + 5 & & & x^2 - 2 \\ \hline -(\ x^2 - 2\ ) & & & 1 \\ \hline 3x + 7 & & & \end{array}$$

❻ $D = x^2 + 5$, $d = x^2 + x + 2$;

Euclides :

$$\begin{array}{rcl|l} x^2 + 5 & & & x^2 + x + 2 \\ \hline -(\ x^2 + x + 2\ ) & & & 1 \\ \hline -x + 3 & & & \end{array}$$

❼ $D = x^2 + 6x$, $d = x^2 + 2x$;

Euclides :

$$\begin{array}{rcl|l} x^2 + 6x & & & x^2 + 2x \\ \cline{4-4} -(\ x^2 + 2x\ ) & & & 1 \\ \cline{1-1} 4x & & & \end{array}$$

❽ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$, $d = x^2 - 2x + 8$;

Euclides :

$$\begin{array}{rcl|l} x^3 + 4x^2 - 2x + 1 & & & x^2 - 2x + 8 \\ \cline{4-4} -(\ x^3 - 2x^2 + 8x\ ) & & & x + 6 \\ \cline{1-1} 6x^2 - 10x + 1 & & & \\ -(\ 6x^2 - 12x + 48\ ) & & & \\ \cline{1-1} 2x - 47 & & & \end{array}$$

❾ $D = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$, $d = 2x^2 - 3x + 1$;

Euclides :

$$\begin{array}{rcl|l} x^3 + 4x^2 - 2x + 1 & & & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{4-4} -(\ x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\ ) & & & \frac{1}{2}x + \frac{11}{4} \\ \cline{1-1} \frac{11}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 & & & \\ -(\ \frac{11}{2}x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{11}{4}\ ) & & & \\ \cline{1-1} \frac{23}{4}x - \frac{7}{4} & & & \end{array}$$

❿ $D = x^3 - 2x + 1$, $d = x^2 - 3x$;

Euclides :

$$\begin{array}{rcl|l} x^3 - 2x + 1 & & & x^2 - 3x \\ \cline{4-4} -(\ x^3 - 3x^2\ ) & & & x + 3 \\ \cline{1-1} 3x^2 - 2x + 1 & & & \\ -(\ 3x^2 - 9x\ ) & & & \\ \cline{1-1} 7x + 1 & & & \end{array}$$

⓫ $D = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, $d = x^2 - 2x + 5$;

Euclides :

$$\begin{array}{rcl|l} x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 & & & x^2 - 2x + 5 \\ \cline{4-4} -(\ x^4 - 2x^3 + 5x^2\ ) & & & x^2 - 2 \\ \cline{1-1} -2x^2 - 2x + 1 & & & \\ -(\ -2x^2 + 4x - 10\ ) & & & \\ \cline{1-1} -6x + 11 & & & \end{array}$$

⓬ $D = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, $d = x^2 - 2$;

Euclides :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
 & x^4 & - & 2x^3 & + & 3x^2 & - & 2x & + & 1 & & x^2 \quad - \quad 2 \\
-(& x^4 & & & - & 2x^2 &) & & & & & \hline x^2 \quad - \quad 2x \quad + \quad 5 \\
\hline
 & & & -2x^3 & + & 5x^2 & - & 2x & + & 1 & & \\
 & & -(& -2x^3 & & & + & 4x &) & & & \\
\hline
 & & & & & 5x^2 & - & 6x & + & 1 & & \\
 & & & & -(& 5x^2 & & & - & 10 &) & \\
\hline
 & & & & & & & -6x & + & 11 & &
\end{array}
$$

13 $D = x^4 - 2x^3 - 2x + 1$, $d = x^3 - 2x + 1$;

Euclides :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
 & x^4 & - & 2x^3 & & & - & 2x & + & 1 & & x^3 \quad - \quad 2x \quad + \quad 1 \\
-(& x^4 & & & - & 2x^2 & + & x &) & & & \hline x \quad - \quad 2 \\
\hline
 & & & -2x^3 & + & 2x^2 & - & 3x & + & 1 & & \\
 & & -(& -2x^3 & & & + & 4x & - & 2 &) & \\
\hline
 & & & & & 2x^2 & - & 7x & + & 3 & &
\end{array}
$$

14 $D = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, $d = x^4 - 5$;

Euclides :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
 & x^4 & - & 2x^3 & + & 3x^2 & - & 2x & + & 1 & & x^4 \quad - \quad 5 \\
-(& x^4 & & & & & & & - & 5 &) & \hline 1 \\
\hline
 & & & -2x^3 & + & 3x^2 & - & 2x & + & 6 & &
\end{array}
$$

15 $D = x^4 - 3x^3 + 5x^2$, $d = x^4 + x^3 - 5$;

Euclides :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & x^4 & - & 3x^3 & + & 5x^2 & & & & & x^4 \quad + \quad x^3 \quad - \quad 5 \\
-(& x^4 & + & x^3 & & & & - & 5 &) & \hline 1 \\
\hline
 & & & -4x^3 & + & 5x^2 & & + & 5 & &
\end{array}
$$

Théorie OK Sol

Exercice 5 - Solution détaillée

❶
$$
\begin{aligned}
& ax + 3x \\
&= a\,x + 3\,x \\
&= (a+3)\,x \\
&= (a+3)x
\end{aligned}
$$

❷
$$
\begin{aligned}
& x^3 - 4x^2 \\
&= x\,x^2 - 4\,x^2 \\
&= (x-4)\,x^2 \\
&= (x-4)x^2
\end{aligned}
$$

❸
$$
\begin{aligned}
& x^2y - xy^2 \\
&= x\,xy - xy\,y \\
&= (x-y)\,xy \\
&= (x-y)xy
\end{aligned}
$$

❹
$$
\begin{aligned}
& 18x^5 - 12x^3 \\
&= 6 \cdot 3\,x^3x^2 - 6 \cdot 2\,x^3 \\
&= 6\ x^3(3x^2 - 2) \\
&= 6x^3(3x^2 - 2)
\end{aligned}
$$

❺
$$
\begin{aligned}
& 16a^2x^2 - 4ax^2 \\
&= 4 \cdot 4\,a\,a\,x^2 - 4\ a\ x^2\,1 \\
&= 4\ a\ x^2(4a - 1) \\
&= 4ax^2(4a - 1)
\end{aligned}
$$

❻
$$
\begin{aligned}
& 15x^3 - 10x^2 + 5x \\
&= 5x\,3x^2 - 5x\,2x + 5x\,1 \\
&= 5x\,(3x^2 - 2x + 1) \\
&= 5x(3x^2 - 2x + 1)
\end{aligned}
$$

❼ $14a^3b^2 + 35a^2b^3 - 28a^4b$

$= 7a^2b\,2ab + 7a^2b\,5b^2 - 7a^2b\,4a^2$

$= 7a^2b\,(2ab + 5b^2 + 4a^2)$

$= 7a^2b(4a^2 + 2ab + 5b^2)$

❽ $(a-b)x + (a-b)y$

$= (a-b)\,x + (a-b)\,y$

$= (a-b)\,(x+y)$

$= (a-b)(x+y)$

❾ $(x-5)x + (5-x)y$

$= (x-5)x + (-(x-5))y$

$= (x-5)x - (x-5)y$

$= (x-5)\,x - (x-5)\,y$

$= (x-5)\,(x-y)$

$= (x-5)(x-y)$

❿ $2a(-x-y) - 7(x+y)$

$= -2a(x+y) - 7(x+y)$

$= -2a\,(x+y) - 7\,(x+y)$

$= (-2a-7)\,(x+y)$

$= (-2a-7)(x+y)$

$= -(2a+7)(x+y)$

Théorie OK Sol

Exercice 6 - Solution détaillée

❶ $x^2 - 25$

$= x^2 - 5^2$

$= x^2 - 5^2$

$= (x - 5)(x + 5)$

$= (x - 5)(x + 5)$

❷ $4a^2 - 1$

$= (2a)^2 - 1^2$

$= ((2a) - 1)((2a) + 1)$

$= (2a - 1)(2a + 1)$

❸ $49x^2 - 9y^2$

$= (7x)^2 - (3y)^2$

$= (7x - 3y)(7x + 3y)$

$= (7x - 3y)(7x + 3y)$

❹ $x^3y - xy^3$

$= xy\,x^2 - xy\,y^2$

$= xy\,(x^2 - y^2)$

$= xy\,(x - y)(x + y)$

$= xy(x - y)(x + y)$

❺ $8a^2 - 18$

$= 2 \cdot 4a^2 - 2 \cdot 9$

$= 2(4a^2 - 9)$

$= 2((2a)^2 - 3^2)$

$= 2(2a - 3)(2a + 3)$

$= 2(2a - 3)(2a + 3)$

❻ $a^4 - 1$

$= (a^2)^2 - 1^2$

$= (a^2 - 1)(a^2 + 1)$

$= (a^2 - 1)(a^2 + 1)$

$= (a^2 - 1^2)(a^2 + 1)$

$= (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$
$= (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$

❼ $x^4 - 81$ $= (x^2)^2 - 9^2$
$= (x^2 - 9)(x^2 + 9)$
$= (x^2 - 9)(x^2 + 9)$
$= (x^2 - 3^2)(x^2 + 9)$
$= (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$
$= (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$

❽ $2x^5 - 32x$ $= 2x\, x^4 - 2x\, 16$
$= 2x\,(x^4 - 16)$
$= 2x((x^2)^2 - 4^2)$
$= 2x(x^2 - 4)(x^2 + 4)$
$= 2x(x^2 - 4)(x^2 + 4)$
$= 2x(x^2 - 2^2)(x^2 + 4)$
$= 2x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$
$= 2x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

❾ $(x - y)^2 - 9$ $= (x - y)^2 - 3^2$
$= ((x - y) - 3)((x - y) + 3)$
$= ((x - y) - 3)((x - y) + 3)$
$= (x - y - 3)(x - y + 3)$

❿ $x^2 - (y + 2)^2$ $= x^2 - (y + 2)^2$
$= (x - (y + 2))(x + (y + 2))$
$= (x - (y + 2))(x + (y + 2))$
$= (x - y - 2)(x + y + 2)$

Théorie OK Sol

Exercice 7 - Solution détaillée

❶ $x^3 - 8$
$= x^3 - 2^3$
$= (x - 2)(x^2 + x\,2 + 2^2)$
$= (x-2)(x^2+2x+4)$

❷ $a^3 + 1$
$= a^3 + 1^3$
$= (a + 1)(a^2 - a\,1 + 1^2)$
$= (a+1)(a^2-a+1)$

❸ $y^3 - 27$
$= y^3 - 3^3$
$= (y - 3)(y^2 + y\,3 + 3^2)$
$= (y-3)(y^2+3y+9)$

❹ $27x^3 + 8$
$= 3x^3 + 2^3$
$= (3x + 2)(3x^2 - 3x\,2 + 2^2)$
$= (3x+2)(9x^2-6x+4)$

❺ $27 + x^6$
$= 3^3 + (x^2)^3$
$= (3 + x^2)(3^2 - 3\,x^2 + (x^2)^2$
$= (3+x^2)(9-3x^2+x^4)$

❻ $27x^3 + \frac{1}{27}$
$= (3x)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3$
$= (3x + \left(\frac{1}{3}\right))((3x)^2 - 3x\,\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2)$
$= (3x + \frac{1}{3})(9x^2 - x + \frac{1}{9})$

❼ $x^4 - x$
$= x\,x^3 - x\,1$
$= x\,(x^3 - 1)$
$= x(x^3 - 1^3)$

$$= x(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

❽ $a^6 - b^6$
$$= (a^3)^2 - (b^3)^2$$
$$= (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$$
$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$= (a - b)(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$$

❾ $64 - x^6$
$$= 8^2 - (x^3)^2$$
$$= (8 - x^3)(8 + x^3)$$
$$= (2^3 - x^3)(2^3 + x^3)$$
$$= (2 - x)(2^2 + 2x + x^2)(2 + x)(2^2 - 2x + x^2)$$
$$= (2 - x)(4 + 2x + x^2)(2 + x)(4 - 2x + x^2)$$

❿ $x^7 - x$
$$= x(x^6 - 1)$$
$$= x((x^3)^2 - 1^2)$$
$$= x(x^3 - 1)(x^3 + 1)$$
$$= x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Théorie OK Sol

Exercice 8 - Solution détaillée

❶ $9x^2 + 24x + 16$

$= (3x)^2 + 2(3x)(4) + 4^2$

$= (3x + 4)^2$

$= (3x + 4)^2$

❷ $x^2 - 4x + 4$

$= x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2$

$= (x - 2)^2$

$= (x - 2)^2$

❸ $4x^2 + 1 - 4x$

$= 4x^2 - 4x + 1$

$= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2$

$= (2x - 1)^2$

$= (2x - 1)^2$

❹ $1 + 4x^2 + 4x^4$

$= 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2x^2 + (2x^2)^2$

$= (1 + 2x)^2$

$= (1 + 2x^2)^2$

❺ $x^3 + 2x^2 + x$

$= x \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot x + x \cdot 1$

$= x(x^2 + 2x + 1)$

$= x(x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2)$

$= x(x + 1)^2$

$= x(x + 1)^2$

❻ $10x - 25 - x^2$

$= -x^2 + 10x - 25$

$= -(x^2 - 10x + 25)$

$= -(x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2)$

$= -(x - 5)^2$

$= -(x - 5)^2$

❼ $1 - 4x^2 + 4x^4$

$= 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2x^2 + (2x^2)^2$

$= (1 - 2x^2)^2$

$= (1^2 - (\sqrt{2}x)^2)^2$

$= ((1 - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x))^2$

$= ((1 - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x))^2$

$= (1 - \sqrt{2}x)^2(1 + \sqrt{2}x)^2$

❽ $x^6 + 2x^3 + 1$

$= (x^3)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot 1 + 1^2$

$= (x^3 + 1)^2$

$= (x^3 + 1)^2$

$= ((x + 1)(x^2 - x + 1))^2$

$= (x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2$

❾ $x^7 - 2x^4 + x$

$= x(x^6 - 2x^3 + 1)$

$= x(x^3 - 1)^2$

$= x((x - 1)(x^2 + x + 1))^2$

$= x(x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2$

❿ $x^8 - 8x^4 + 16$

$= (x^4)^2 - 2 \cdot 4 \cdot x^4 + 4^2$

$= (x^4 - 4)^2$

$= ((x^2)^2 - 2^2)^2$

$= ((x^2 - 2)(x^2 + 2))^2$

$= ((x^2 - (\sqrt{2})^2)(x^2 + 2))^2$

$= ((x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2))^2$

$= (x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2(x^2 + 2)^2$

⓫ $2a^6 - 4a^3b^2 + 2b^4$

$= 2((a^3)^2 - 2a^3b^2 + (b^2)^2)$

$= 2(a^3 - b^2)^2$

⓬ $2a^6 - 32a^3 + 128$

$= 2(a^6 - 16a^3 + 64)$

$= 2((a^3)^2 - 2a^3 8 + 8^2)$

$= 2(a^3 - 8)^2$

$= 2(a^3 - 2^3)^2$

$$= 2((a-2)(a^2+2a+2^2))^2$$
$$= 2(a-2)^2(a^2+2a+4)^2$$

Théorie OK Sol

Exercice 9 - Solution détaillée

❶ $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

$= a^3 + 3a^2 2 + 3a\,2^2 + 2^3$

$= (a + 2)^3$

$= (a+2)^3$

❷ $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$

$= x^3 - 3x^2 3y + 3x\,(3y)^2 - (3y)^3$

$= (x - 3y)^3$

$= (x-3y)^3$

❸ $2a^3b - 6a^2bc + 6abc^2 - 2bc^3$

$= 2b(a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3)$

$= 2b(a^3 - 3a^2c + 3a\,c^2 - c^3)$

$= 2b(a-c)^3$

❹ $x^6 - x^5 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{27}x^3$

$= \frac{1}{27}x^3(27x^3 - 27x^2 + 9x - 1)$

$= \frac{1}{27}x^3(3x-1)^3$

❺ $-64b^3 - 12b + 1 + 48b^2$

$= 1 - 12b + 48b^2 - 64b^3$

$= 1^3 - 3\,1^2\,(4b) + 3\,1\,(4b)^2 - (4b)^3$

$= (1 - (4b))^3$

$= (1-4b)^3$

Théorie OK Sol

Exercice 10 - Solution détaillée

❶ $xy + ax + 2y + 2a$

$= (xy + ax) + (2y + 2a)$
$= x(y + a) + 2(y + a)$
$= (x + 2)(y + a)$

❷ $x^2 - 3xy - 2ax + 6ay$

$= (x^2 - 3xy) - (2ax - 6ay)$
$= x(x - 3y) - 2a(x - 3y)$
$= (x - 2a)(x - 3y)$

❸ $ax - x - a + 1$

$= (ax - x) - (a - 1)$
$= x(a - 1) - (a - 1)$
$= (x - 1)(a - 1)$

❹ $6x^2 - 6y + 4x - 9xy$

$= (4x - 6y) + (6x^2 - 9xy)$
$= 2(2x - 3y) + 3x(2x - 3y)$
$= (2 + 3x)(2x - 3y)$

❺ $a^2bx - ab^2 - ax^2 + bx$

$= (a^2bx - ab^2) - (ax^2 - bx)$
$= ab(ax - b) - x(ax - b)$
$= (ab - x)(ax - b)$

❻ $x^2 - 4 + xy + 2y$

$= (x^2 - 4) + (xy + 2y)$
$= (x - 2)(x + 2) + (x + 2)y$
$= (x + 2)((x - 2) + y)$
$= (x + 2)(x + y - 2)$

❼ $a^2 - 2a - 2b - b^2$

$= (a^2 - b^2) + (-2a - 2b)$
$= (a - b)(a + b) - 2(a + b)$
$= (a + b)(a - b - 2)$

❽ $x + y + x^3 + y^3$

$= (x + y) + (x^3 + y^3)$
$= (x + y) + (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$$= (x+y)(1+(x^2-xy+y^2))$$
$$= (x+y)(x^2-xy+y^2+1)$$

❾ $x^3-y^3+x^2-y^2$
$$= (x^3-y^3)+(x^2-y^2)$$
$$= (x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)(x+y)$$
$$= (x-y)((x^2+xy+y^2)+(x+y))$$
$$= (x-y)(x^2+xy+y^2+x+y)$$

❿ $x^5-x^3y^2+x^2y^3-y^5$
$$= (x^5-x^3y^2)+(x^2y^3-y^5)$$
$$= x^3(x^2-y^2)+y^3(x^2-y^2)$$
$$= (x^3+y^3)(x^2-y^2)$$
$$= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x+y)$$
$$= (x+y)^2(x-y)(x^2-xy+y^2)$$

⓫ $a^3-2a^2-b^3+2b^2$
$$= (a^3-b^3)+(-2a^2+2b^2)$$
$$= (a^3-b^3)-2(a^2-b^2)$$
$$= (a-b)(a^2+ab+b^2)-2(a-b)(a+b)$$
$$= (a-b)(a^2+ab+b^2-2a-2b)$$

⓬ $x^2+6x+9-y^2$
$$= (x^2+6x+9)-y^2$$
$$= (x+3)^2-y^2$$
$$= ((x+3)-y)((x+3)+y)$$
$$= (x-y+3)(x+y+3)$$

⓭ $4x^2-25-4xy+y^2$
$$= (4x^2-4xy+y^2)-25$$
$$= (2x-y)^2-25$$
$$= (2x-y)^2-5^2$$
$$= ((2x-y)-5)((2x-y)+5)$$
$$= (2x-y-5)(2x-y+5)$$

⓮ $a^2+b^2-2ab-c^2$
$$= (a^2-2ab+b^2)-c^2$$
$$= (a-b)^2-c^2$$
$$= ((a-b)-c)((a-b)+c)$$
$$= (a-b-c)(a-b+c)$$

⓯ $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-8$
$$= (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)-8$$
$$= (x+y)^3-8$$

$$= (x+y)^3 - 2^3$$
$$= ((x+y)-2)((x+y)^2 + 2(x+y) + 2^2)$$
$$= (x+y-2)(x^2+2xy+y^2+2x+2y+4)$$

16 $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 8x^3$

$$= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 8x^3$$
$$= (x+1)^3 - 8x^3$$
$$= (x+1)^3 - (2x)^3$$
$$= ((x+1)-2x)((x+1)^2 + (x+1)2x + (2x)^2)$$
$$= (-x+1)(x^2+2x+1+2x^2+2x+4x^2)$$
$$= -(x-1)(7x^2+4x+1)$$

17 $x^4 + 1$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$$
$$= (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2$$
$$= (x^2+1)^2 - 2x^2$$
$$= (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$$
$$= ((x^2+1) - \sqrt{2}x)((x^2+1) + \sqrt{2}x)$$
$$= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

Théorie OK Sol

Equations - Enoncés

Exercice 1 - Enoncé

Résolvez (par rapport à l'inconnu x) :

1. $5x - 25 = 0$
2. $7x + 50 = 1$
3. $3x - 24 = 5x + 26$
4. $27 + 3x = -5x + 7$
5. $(3x - 2) + 2(2x - 5) = 4(x - 7) - 2(x - 8)$
6. $2x + 15 = 2(x - 3)$
7. $5x + 5(x - 4) = 10(x - 2)$
8. $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 7(x - 6)$
9. $4(x + 1)^2 = (2x + 3)^2 - 7(x + 1)$
10. $(y + 1)x + (y - 1)^2 = 5$

Théorie Sol

Exercice 2 - Enoncé

Résolvez (par rapport à l'inconnu x) :

1. $x^2 - 3x + 2 = 0$
2. $x^2 = 4(x - 1)$
3. $2x^2 + x - 1 = 0$
4. $10x^2 + 3x - 1 = 0$
5. $x^2 + x = -2$
6. $2x + 15 = 2(x - 3)$
7. $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 7(x - 6)$
8. $4(x + 1)^2 + (2x + 3)^2 - 7(x + 1) = 0$
9. $x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$
10. $yx^2 + 4x = 5$

Théorie Sol

Equations - Solutions

Exercice 1 - Solution

1. $5x - 25 = 0 \Rightarrow x = 5$
2. $7x + 50 = 1 \Rightarrow x = -7$
3. $3x - 24 = 5x + 26 \Rightarrow x = -25$
4. $27 + 3x = -5x + 7 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$
5. $(3x - 2) + 2(2x - 5) = 4(x - 7) - 2(x - 8) \Rightarrow x = 0$
6. $2x + 15 = 2(x - 3)$ aucune solution possible
7. $5x + 5(x - 4) = 10(x - 2)$ une valeur arbitraire $x \in \mathbb{R}$
8. $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 7(x - 6) \Rightarrow x = -14$
9. $4(x + 1)^2 = (2x + 3)^2 - 7(x + 1) \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$
10. $(y + 1)x + (y - 1)^2 = 5$

    $y \neq -1 \Rightarrow x = \frac{-y^2 + 2y + 4}{y + 1}$,

    $y = -1 \Rightarrow$ aucune solution possible

Théorie OK Détail

Exercice 2 - Solution

1. $x^2 - 3x + 2 = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$
2. $x^2 = 4(x-1), \quad x = 2$
3. $2x^2 + x - 1 = 0 \quad x = -1, \quad x = \frac{1}{2}$
4. $10x^2 + 3x - 1 = 0 \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{5}$
5. $x^2 + x = -2$ aucune solution
6. $2x + 15 = 2(x-3)$ aucune solution
7. $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 7(x-6)$ aucune solution
8. $4(x+1)^2 + (2x+3)^2 - 7(x+1) = 0$ aucune solution
9. $x^2 + 4xy + 4y^2 = 0 \quad x = -2y$
10. $yx^2 + 4x = 5$

    $y = 0: \quad x = \frac{5}{4}$

    $y > -\frac{4}{5}: \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20y}}{2y}$

    $y = -\frac{4}{5}: \quad x = -\frac{5}{2}$

    $y < -\frac{4}{5}:$ aucune solution

Théorie OK Détail

Equations - Solution détaillée

Exercice 1 - Solution détaillée

❶ $5x - 25 = 0$
$\Rightarrow 5x = 25$
$\Rightarrow x = \dfrac{25}{5}$
$\Rightarrow x = 5$

❷ $7x + 50 = 1$
$\Rightarrow 7x = 1 - 50$
$\Rightarrow x = \dfrac{-49}{7}$
$\Rightarrow x = -7$

❸ $3x - 24 = 5x + 26$
$\Rightarrow 3x - 5x = 26 - (-24)$
$\Rightarrow -2x = 50$
$\Rightarrow x = -25$

❹ $27 + 3x = -5x + 7$
$\Rightarrow 8x = -20$
$\Rightarrow x = -\dfrac{5}{2}$

❺ $(3x - 2) + 2(2x - 5) = 4(x - 7) - 2(x - 8)$

$\Rightarrow 3x - 2 + 4x - 10 = 4x - 28 - 2x + 16$

$\Rightarrow 7x - 12 = 2x - 12$

$\Rightarrow 5x = 0 \Rightarrow x = 0$

❻ $2x + 15 = 2(x - 3)$

$\Rightarrow 2x + 15 = 2x - 6$

$\Rightarrow 0x = -21,$

aucune solution possible

❼ $5x + 5(x - 4) = 10(x - 2)$

$\Rightarrow 10x - 20 = 10x - 20$

$\Rightarrow 0x = 0,$

une valeur arbitraire $x \in \mathbb{R}$

❽ $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 7(x - 6)$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 7x - 42$

$\Rightarrow 4x - 7x = -42$

$\Rightarrow x = -14$

❾ $4(x + 1)^2 = (2x + 3)^2 - 7(x + 1)$

$\Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 4x^2 + 12x + 9 - 7x - 7$

$\Rightarrow 8x + 4 = 5x + 2$

$\Rightarrow 3x = -2$

$\Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

❿ $(y + 1)x + (y - 1)^2 = 5$

$\Rightarrow (y + 1)x = 5 - (y - 1)^2;$

$y \neq -1 \Rightarrow x = \frac{-y^2 + 2y + 4}{y + 1},$

$y = -1 \Rightarrow 0x = 1$

$\Rightarrow$ aucune solution possible

Théorie OK Sol

Exercice 2 - Solution détaillée

❶
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$1\,x^2 + (-3)x + 2 = 0$$
$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$$
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$$
$$x = 1, \quad x = 2$$

❷
$$x^2 = 4(x - 1)$$
$$1\,x^2 + (-4)x + 4 = 0$$
$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$$
$$x = 2$$

❸
$$2x^2 + x - 1 = 0$$
$$2\,x^2 + 1\,x + (-1) = 0$$
$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2}$$
$$x = -1, \quad x = \frac{1}{2}$$

❹
$$10x^2 + 3x - 1 = 0$$
$$D = 3^2 + 40 = 49$$
$$x = \frac{-3 \pm 7}{20}$$
$$x = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{5}$$

❺
$$x^2 + x = -2$$

$x^2 + x + 2 = 0$

$D = 1 - 8 = -7 < 0$

aucune solution

❻ $2x + 15 = 2(x - 3)$

$2x - 2x + 15 + 6 = 0$

$21 = 0$

aucune solution

❼ $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 7(x - 6)$

$x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 7x - 42$

$2x^2 - 7x + 44 = 0$

$D = 49 - 352 < 0$

aucune solution

❽ $4(x + 1)^2 + (2x + 3)^2 - 7(x + 1) = 0$

$8x^2 + 13x + 6 = 0$

$D = 169 - 192 < 0$

aucune solution

❾ $x^2 + 4xy + 4y^2 = 0 \qquad x = -2y$

$D = 16y^2 - 16y^2 = 0$

$x = \dfrac{-4y}{2} = -2y$

❿ $yx^2 + 4x = 5$

$y = 0 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{4}$

$y \neq 0 \Rightarrow yx^2 + 4x - 5 = 0$

$D = 16 + 20y$

$D > 0 \Rightarrow y > -\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 20y}}{2y}$

$D = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-4}{2\frac{-4}{5}} = \dfrac{5}{2}$

$D < 0 \Rightarrow y < -\frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ aucune solution

Théorie OK Sol

Systèmes - Enoncés

Exercice 1 - Enoncé

Résolvez les systèmes suivants :

❶ $\begin{cases} 5x = 10 \\ 3y = 12 \end{cases}$

❷ $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3y = 12 \end{cases}$

❸ $\begin{cases} 2x = 12 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

❹ $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$

❺ $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

❻ $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$

❼ $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

❽ $\begin{cases} 3x = 3y + 12 \\ 2x = 4y - 2 \end{cases}$

❾ $\begin{cases} 3(x+y) &= 4(x-y)-9 \\ 2(x-y) &= 4x+3y+1 \end{cases}$

Théorie Sol

Exercice 2 - Enoncé

Résolvez les systèmes suivants :

❶ $\begin{cases} 5x & & & = & 10 \\ & 3y & & = & 12 \\ & & 6z & = & 18 \end{cases}$

❷ $\begin{cases} x + y + 4z = 25 \\ 2x + 3y = 12 \\ 3x = 9 \end{cases}$

❸ $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 4 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

❹ $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$

❺ $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 16 \\ 3x + 4y + 2z = 19 \\ 4x + 2y + 3z = 19 \end{cases}$

❻ $\begin{cases} 2(x+y) + 3(y+z) = 4x + 3y + 3 \\ 2(y+z) + 3(z+x) = 4y + 2z + 4 \\ 2(z+x) + 3(x+y) = 4z + 4x + 2 \end{cases}$

Théorie Sol

Exercice 3 - Enoncé

Résolvez les systèmes suivants :

❶ $\begin{cases} x + y = 3 \\ 4x + 4y = 12 \end{cases}$

❷ $\begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + 2y + 3z = 50 \\ 2x + 3y + 4z = 70 \end{cases}$

❸ $\begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + 2y + 2z = 12 \\ 2x + 3y + 3z = 8 \end{cases}$

❹ $\begin{cases} 2x = 4 \\ 2x + 3y = 1 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

❺ $\begin{cases} 2x = 4 \\ 2x + 3y = 1 \\ 2x + 9y = -5 \end{cases}$

Théorie Sol

Exercice 4 - Enoncé

Un rectangle a une circonférence de 30 mètres. Sa longueur est quatre fois plus grande que sa hauteur. Déterminez les dimensions du rectangle.

Théorie Sol

Exercice 5 - Enoncé

Ensemble, Arnaud, Bernard et Christophe ont épargné 200 euros. Arnaud et Bernard ont 160 euros, et Bernard a 20 euros de plus que Christophe. Combien d'argent a chacun des trois ?

Théorie Sol

Systèmes - Solutions

Exercice 1 - Solution

1. $x = 2, \quad y = 4$
2. $x = 3, \quad y = 4$
3. $x = 6, \quad y = -3$
4. $x = 4, \quad y = 3$
5. $x = 2, \quad y = 3$
6. $x = 1, \quad y = 5$
7. $x = 1, \quad y = 2$
8. $x = 9, \quad y = 5$
9. $x = 2, \quad y = -1$

Théorie OK Détail

Exercice 2 - Solution

1. $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 3$
2. $x = 3, \quad y = 2, \quad z = 5$
3. $x = 5, \quad y = -1, \quad z = -2$
4. $x = 1, \quad y = 3, \quad z = -3$
5. $x = 3, \quad y = 2, \quad z = 1$
6. $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1$

Théorie OK Détail

Exercice 3 - Solution

1. $x = A, \quad y = 3 - A$
2. $x = -10 + A, \quad y = 30 - 2A, \quad z = A$
3. aucune solution
4. aucune solution
5. $x = 2, \quad y = -1$

Théorie OK Détail

Exercice 4 - Solution

$$L = 12, \quad H = 3$$

Théorie OK Détail

Exercice 5 - Solution

Arnaud a 100 euros, Bernard 60 et Christophe 40.

Théorie OK Détail

Systèmes - Solution détaillée

Exercice 1 - Solution détaillée

❶ La première équation contient seulement l'inconnu x. On résout cette équation et on déduit directement que $x = 2$. De la même façon, on déduit de la deuxième équation que $y = 4$.

❷ La deuxième équation implique immédiatement que $y = 4$. En substituant cette valeur dans la première équation on constate que

$$x + 4 = 7$$

et, par conséquent, $x = 3$.

❸ Il suit de la première équation que $x = 6$. En substituant cette valeur dans la deuxiẽme équation, on constate que

$$18 + 2y = 12,$$

d'où il suit que $y = -3$.

❹ On ajout la deuxiẽme équation à la première, et on soustrait la premiẽre de la deuxiẽme. Ceci nous donne un système équivalent,

$$2x = 8 \qquad -2y = -6,$$

et on en déduit que $x = 4$ et $y = 3$.

❺ On soustrait deux fois la deuxième équation de la première, et deux fois la première de la deuxième pour obtenir le système équivalent suivant :

$$-3y = -9 \qquad -3x = -6.$$

On conclut que $x = 2$ et $y = 3$.

❻ On ajoute deux fois la deuxième équation à la première, et deux fois la première à la deuxième. Ceci nous montre que

$$5y = 25 \qquad 5x = 5$$

d'où il suit que $x = 1$ et $y = 5$.

❼ On prend deux fois la première èquation et on soustrait trois fois la deuxième. Ensuite, on prend deux fois la deuxième équation et on y ajoute trois fois la première. On ontient ainsi le système équivalent

$$13x = 13 \qquad 13y = 26,$$

et on déduit que $x = 1$ et $y = 2$.

❽ La deuxième équation nous montre que $x = 2y - 1$. On insère cette valeur dans la première équation, et on obtient

$$6y - 3 = 3y + 12,$$

impliquant tout de suite que $y = 5$. La valeur de x est, par conséquent, donnée par $x = 2 \cdot 5 - 1 = 9$.

❾ En utilisant les règles de calcul introduites avant, on reduit ce système à la forme

$$-x + 7y = -9 \qquad -2x - 5y = 1.$$

On soustrait la deuxième équation du double de la première, et on obtient le système équivalent

$$-x + 7y = -9 \qquad -19y = 19.$$

Il suit de la deuxième équation que $y = -1$, et en insérant cette valeur dans la première équation, on voit que

$$-x - 7 = -9,$$

et, par conséquent, $x = 2$.

Théorie OK Sol

Exercice 2 - Solution détaillée

❶ Il suit de la première équation que $x = 2$, on déduit de la deuxième équation que $y = 4$, et la troisième nous montre que $z = 3$.

❷ Il suit de la troisième équation que $x = 3$. On insère cette valeur dans la deuxième équation, et on déduit que

$$6 + 3y = 12,$$

et, par conséquent, $y = 2$. En insérant les valeurs obtenues dans la première équation, on voit que

$$3 + 2 + 4z = 25,$$

et on conclut que $z = 5$.

❸ On soustrait la deuxième équation de la première, on ajoute la troisième à la deuxième et on soustrait la première de la troisième. On obtient ainsi le système suivant :

$$2y = -2, \qquad 2x = 10, \qquad -2z = 4,$$

et on en déduit que

$$x = 5, \quad y = -1, \quad z = -2.$$

❹ On soustrait la deuxième équation de la première et de la troisième, et on soustrait la première et la troisième de trois fois la deuxième pour obtenir un système équivalent

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & y & & = & 3 \\ & & z & = & -3 \\ x & & & = & 1, \end{array}\right.$$

La solution de ce système est, par conséquent,

$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = -3.$$

❺ On soustrait la troisième équation de deux fois la première, et trois fois la troisième de 4 fois la deuxième. On obtient ainsi le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 4y & + & 5z & = & 13 \\ & & 10y & - & z & = & 19 \\ 4x & + & 2y & + & 3z & = & 19. \end{array}\right.$$

Ensuite, on ajoute 5 fois la deuxième équation de ce système à la première équation pour obtenir le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 54y & & & = & 108 \\ & & 10y & - & z & = & 19 \\ 4x & + & 2y & + & 3z & = & 19. \end{array}\right.$$

La première équation implique que $y = 2$, insertion de cette valeur dans la deuxième équation nous donne $z = 20 - 19 = 1$, et la dernière équation montre que

$$4x + 4 + 3 = 19,$$

et on en conclut que $x = 3$.

❻ D'abord, on réduit ce système à la forme standard à l'aide des règles de calcul de l'algèbre. On obtient alors le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 2. \end{array}\right.$$

On résout la dernière équation pour l'inconnu x, et on conclut que $x = 2 - 3y + 2z$. Insertion de cette expression dans les autres équations nous donne

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 8y & - & z & = & 7 \\ -11y & + & 9z & = & -2 \end{array}\right.$$

On déduit de la première équation que $z = 8y - 7$, et après substitution, la dernière équation devient $61y = 61$, d'où il suit que $y = 1$. On insère cette valeur dans les autres formules obtenues, et on voit que $z = 8 - 7 = 1$ et $x = 2 - 3 + 2 = 1$. La solution unique de ce système d'équations est donc donnée par

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1.$$

Exercice 3 - Solution détaillée

❶ On soustrait 4 fois la première équation de la deuxième, et on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 0x + 0y = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation est donc superflue, et on peut l'éliminer du système. Toutes les solutions sont donc caractérisées par l'équation

$$x + y = 3.$$

En choisissant une valeur arbitraire $x = A$, la valeur de y est donnée par

$$y = 3 - x = 3 - A.$$

❷ On soustrait la première équation une fois de la deuxième, et deux fois de la troisième pour obtenir le système équivalent

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ \quad y + 2z = 30 \\ \quad y + 2z = 30. \end{cases}$$

Si, maintenant, on soustrait la deuxième équation de la troisième, on obtient

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ \quad y + 2z = 30 \\ \quad\quad\quad 0 = 0. \end{cases}$$

La dernière équation étant superflue, on l'élimine du système. La deuxième équation nous montre que $y = 30 - 2z$, et en insérant cette valeur dans la première équation, et en résolvant cette équation pour l'inconnu x, on voit que

$$y = 30 - 2z, \quad x = 20 - (30 - 2z) - z = -10 + z.$$

Si on choisit, pour l'inconnu z, une valeur arbitraire A, on peut déduire que la solution du système est de la forme

$$x = -10 + A, \quad y = 30 - 2A, \quad z = A.$$

❸ On soustrait d'abord la première équation une fois de la deuxième, et deux fois de la troisième. On voit alors que

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ \quad\; y + z = -8 \\ \quad\; y + z = -32. \end{cases}$$

Soustraction de la deuxième équation et la troisième nous donne

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ \quad\; y + z = -8 \\ \qquad\; 0 = -24. \end{cases}$$

Il suit que les équations sont contradictoires, et que, par conséquent, le système n'admet pas de solution.

❹ On déduit de la première équation que $x = 2$, la deuxième équation montre alors que $3y = 1 - 4 = -3$, et, par conséquent $y = -1$. Ces valeurs contredisent la troisième équation, parce que

$$2x + y = 4 - 1 = 3 \neq 6.$$

Par conséquent, le système n'admet pas de solution.

❺ Il suit de la première équation que $x = 2$, la deuxième equation nous montre que $y = -1$. Insertion de ces valeurs dans la troisième équation nous donne

$$2x + 9y = 4 - 9 = -5.$$

Il suit que la solution obtenue satisfait également à la troisième équation (qui peut donc être éliminée du système). La solution du système est donc donnée par

$$x = 2, \quad y = -1.$$

Théorie OK Sol

Exercice 4 - Solution détaillée

On représente la longueur et la hauteur du rectangle par L et H. Il suit alors de l'énoncé que L et H sont les solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2(L+H) &= 30 \\ L &= 4H \end{cases}$$

On résout ce système à l'aide de la méthode de substitution. On déduit de la deuxième équation que

$$L = 4H.$$

Substitution dans la première équation montre que

$$2(4H + H) = 30,$$

et, par conséquent,

$$H = 3, \qquad L = 4H = 12.$$

Théorie OK Sol

Exercice 5 - Solution détaillée

Si on représente les montants épargnés par les trois personnes par A, B et C, l'énoncé nous fournit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A+B+C &= 200 \\ A+B &= 160 \\ B &= C+20 \end{cases}$$

On soustrait la deuxième équation de la première pour obtenir que

$$C = 200 - 160 = 40.$$

Substitution dans la troisième équation montre alors que

$$B = 40 + 20 = 60.$$

Il suit de la deuxième équation que

$$A + 60 = 160,$$

et, par conséquent,

$$A = 100.$$

Théorie OK Sol

Fonctions - Enoncés

Exercice 1 - Enoncé

Déterminez l'image des valeurs -2, -1, 0, 1 et 2 pour la fonction

$$f(x) = x^3 - 4x + 2.$$

Déterminez également le domaine de définition de cette fonction, et construisez le graphique de la fonction.

Théorie Sol

Exercice 2 - Enoncé

Déterminez l'image des valeurs -2, -1, 0, 1 et 2 pour la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Déterminez également le domaine de définition de cette fonction, et construisez le graphique de la fonction.

Théorie Sol

Exercice 3 - Enoncé

Déterminez l'image des valeurs -2, 0, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ pour la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Déterminez également le domaine de définition de cette fonction.

Théorie Sol

Exercice 4 - Enoncé

Construisez la représentation graphique des fonctions linéaires suivantes. Déterminez le coefficient angulaire et les points d'intersection avec les axes.

1. $y = x$
2. $y = 2x + 1$
3. $y = -x + 4$
4. $y = -3x + 2$
5. $y = 3$

Théorie Sol

Exercice 5 - Enoncé

Déterminez la fonction linéaire dont le graphique passe par les points donnés.

1. $(0,0) en (2,2)$
2. $(0,0) en (2,6)$
3. $(0,3) en (2,0)$
4. $(1,2) en (3,4)$
5. $(1,5) en (3,-8)$
6. $(1,5) en (5,5)$

Théorie Sol

Exercice 6 - Enoncé

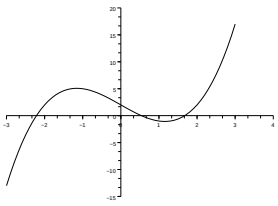
Le niveau d'eau dans un bassin est 5.03m à 16h, 5.30m à 16h15. Déterminez le niveau d'eau à 16h05 et à 16u07, à l'aide d'une interpolation linéaire.

Théorie Sol

Fonctions - Solutions

Exercice 1 - Solution

$$f(-2) = 2, \quad f(-1) = 5, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = -1, \quad f(2) = 2$$
$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

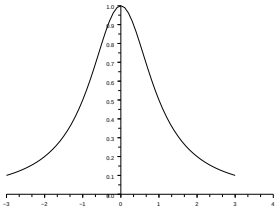


Théorie OK Détail

Exercice 2 - Solution

$$f(-2) = \frac{1}{5}, \quad f(-1) = \frac{1}{2}, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(2) = \frac{1}{5}$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$$



Théorie OK Détail

Exercice 3 - Solution

$$f(-2) = \frac{1}{3}, \quad f(0) = -1, \quad f(\frac{1}{2}) = -\frac{4}{3}, \quad f(\frac{3}{2}) = \frac{4}{5}$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Théorie OK Détail

Exercice 4 - Solution

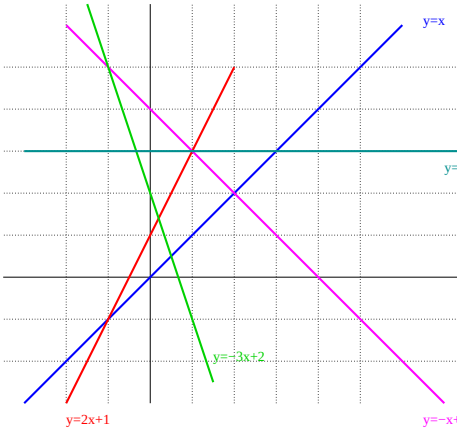
❶ La droite passe par les points $(-3,-3)$ et $(3,3)$. Coefficient angulaire est 1, intersection avec les deux axes en $(0,0)$.

❷ La droite passe par les points $(-2,-3)$ et $(2,5)$. Coefficient angulaire 2, intersections en $(0,1)$ et $(-\frac{1}{2},0)$.

❸ Droite passe par $(0,4)$ et $(4,0)$. Coefficient angulaire -1, intersections en $(0,4)$ et $(4,0)$.

❹ Droite passe par $(-1,5)$ et $(1,-1)$. Coefficient angulaire -3, intersections en $(0,2)$ et $(\frac{2}{3},0)$.

❺ Droite horizontale, passant par $(-3,3)$ et $(3,3)$. Coefficient angulaire 0. Intersection avec l'axe y en $(0,3)$, pas d'intersection avec l'axe x.



Théorie OK Détail

Exercice 5 - Solution

1. $y = x$
2. $y = 3x$
3. $y = -\frac{2}{3}x + 2$
4. $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$
5. $y = -\frac{13}{2}x + \frac{23}{5}$
6. $y = 5$

Théorie OK Détail

Exercice 6 - Solution

A 16h05 le niveau d'eau est à 5,12 mètres,
à 16h07 il est à 5,156 mètres.

Théorie OK Détail

Fonctions - Solution détaillée

Exercice 1 - Solution détaillée

Un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - 4(-2) + 2 = 2, \\ f(-1) &= (-1)^3 - 4(-1) + 2 = 5, \\ f(0) &= (0)^3 - 4(0) + 2 = 2, \\ f(1) &= (1)^3 - 4(1) + 2 = -1, \\ f(2) &= (2)^3 - 4(2) + 2 = 2 \end{aligned}$$

Pour une valeur arbitraire $x \in \mathbb{R}$ on peut calculer $x^3 - 4x + 2$. Par conséquent,

$$\text{dom } f = \mathbb{R}.$$

Théorie OK Sol

Exercice 2 - Solution détaillée

Un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} f(-2) &= \frac{1}{(-2)^2+1} = \frac{1}{5} = 0.2, \\ f(-1) &= \frac{1}{(-1)^2+1} = \frac{1}{2} = 0.5, \\ f(0) &= \frac{1}{0^2+1} = 1, \\ f(1) &= \frac{1}{(1)^2+1} = \frac{1}{2} = 0.5, \\ f(2) &= \frac{1}{(2)^2+1} = \frac{1}{5} = 0.2, \end{aligned}$$

Pour une valeur arbitraire $x \in \mathbb{R}$ on peut calculer $\frac{1}{x^2+1}$. Par conséquent,

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}.$$

Théorie OK Sol

Exercice 3 - Solution détaillée

Un calcul simple montre que

$$f(-2) = \frac{1}{(-2)^2 - 1} = \frac{1}{3},$$
$$f(0) = \frac{1}{(0)^2 - 1} = -1,$$
$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3},$$
$$f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

On peut calculer $\frac{1}{x^2-1}$ pour toutes les valeurs réelles différentes de -1 et 1. Par conséquent,

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Théorie OK Sol

Exercice 4 - Solution détaillée

Théorie OK Sol

Exercice 5 - Solution détaillée

Théorie OK Sol

Exercice 6 - Solution détaillée

La formule d'interpolation linéaire montre que le niveau d'eau à 16h05 est donné par

$$5.03 + \frac{5.30 - 5.03}{16:15 - 16:00}(16:05 - 16:00) = 5.12,$$

le niveau d'eau à 16u07 est

$$5.03 + \frac{5.30 - 5.03}{16:15 - 16:00}(16:07 - 16:00) = 5.156.$$

Le niveau d'eau monte de 27 centimètres en 15 minutes, donc 1,8 centimètres par minute. En 5 minutes on obtient donc un accroissement de 9 centimètres, en 7 minutes on ajoute 12,6 centimètres. Tenant compte du niveau initial de 5,03 mètres, on obtient le résultat souhaité.

Théorie OK Sol